Дорогой друг!

Книжка, которую ты сейчас держишь в руках, — это приглашение принять участие в математическом празднике. Он проходит каждый год в одно из воскресений февраля в Главном Здании Московского Государственного Университета на Воробьевых Горах. В этот день сотни школьников 6–7 классов приходят, чтобы порешать интересные задачи.

Присоединись к ним и ты! И не забудь тетрадь, ручку, деньги на обед.

Что такое математический праздник и как он проходит?

Начинается праздник в 10.00 (конечно, прийти лучше минут на 10–15 пораньше). Сначала участников рассаживают по аудиториям и объясняют «правила игры» (ведь для многих — это первое в их жизни математическое соревнование).

А правила достаточно просты. Надо стараться решить как можно больше задач (причем самому — разговаривать с соседями не разрешается. Играть надо честно!).

Особое внимание надо обратить на изложение решений в тетради — записывать надо так, чтобы проверяющий мог это прочитать и понять! Не надо тратить время на переписывание условия, но обязательно надо указывать номер задачи, которую вы решаете.

На решение задач дается 2 часа. Потом перерыв, во время которого можно перекусить, послушать разбор задач, посетить интересную лекцию по математике.

В 14.00 начинается культурная программа (обычно это показ мультфильмов). А в 16.00–16.30 уже награждение победителей. После награждения — показ работ.

Два слова из истории праздника

Математический праздник возник в 1990 году по инициативе преподавателей математического кружка при МГУ (Малого Мехмата) Саши Спивака, Димы Ботина и автора этих строк. На первом празднике было около 200 ребят — в основном из математических кружков. Число участников неуклонно росло. В 1997 году их уже было свыше 1200 из более, чем 200 школ. Были даже гости из других городов. С 1994 года праздник стал частью Московской Математической Олимпиады.

Праздник проводится силами огромного числа энтузиастов — студентов и аспирантов мехмата, руководителей кружков, преподавателей вузов, учителей и школьников старших классов ведущих математических школ — низкий им всем поклон. Без них праздника бы не было...

Праздник был бы невозможен также и без поддержки со стороны руководства и сотрудников Московского Государственного Университета: в этот день большая часть комлекса МГУ на Воробьевых Горах — в распоряжении участников праздника.

Об этой книге

В первой части книги приведены задачи математических праздников 1990–1997 годов. Можно просто решать те задачи, которые вам понравятся, а можно иногда и поиграть в олимпиаду — попытаться решить как можно больше задач одной олимпиады за 2 часа. Обычно (но не всегда!) первые две задачи попроще, последние посложнее, причем на разные темы, так что 2–3 решенные задачи — это уже очень неплохой результат! Иногда (особенно в задачах первых праздников, в которых участвовали в основном кружковцы) могут встретиться задачи, использующие знания, которые формально выходят за рамки школьной программы соответствующего класса. Впрочем сейчас, с распространением огромного числа альтернативных учебников, не всегда соответствующих базовому плану, тяжело определить, что, собственно, в эту программу входит. В то же время, если у вас достаточно сообразительности и интуиции, нащупать путь решения всегда можно!

Если задача не поддается, стоит заглянуть в указание — там может содержаться подсказка или даже идея решения. Но не спешите — не лишайте себя радости!

Также очень советуем сверить свое решение с приведенным в книге — кроме просто проверки правильности своего решения (даже если у вас совпал ответ, решение может быть неверным!) вы можете узнать другие подходы к задаче, прочитать интересные комментарии.

Благодарности

При подготовке данной книги, кроме архивов автора, использовались сборники задач и решений, которые ежегодно издаются оргкомитетом, книга «Московские математические олимпиады 60 лет спустя» (составители А. Канель-Белов, А. Ковальджи, под ред. Ю. С. Ильяшенко и В. М. Тихомирова) и материалы, предоставленные Д. Ботиным, В. Бугаенко, А. Ковальджи, А. Спиваком, Р. Федоровым. Всем им — большое спасибо!

Огромная благодарность В. Радионову, который в кратчайшие сроки подготовил иллюстрации в системе METAPOST.

И. Ященко

Авторы задач

Задачи, несомненно, определяют лицо математического праздника. И окончательные варианты рождаются в результате долгих раздумий и обсуждений. Часто в результате даже сложно установить, кто же конкретно является автором той или иной задачи. Кто-то бросил идею, другой придумал красивую формулировку.

Тем не менее, мы решились привести список тех, кто предложил задачи, в тех случаях, где это «удалось установить». Приносим свои искренние извинения за возможные неточности. Будем рады любым замечаниям и поправкам.

1993 год. 6 класс: А. Спивак (1,4,8), Д. Ботин (2,3,6), Е. Иванова (5), С. Токарев (7).

7 класс: А. Спивак (1,3), И. Ященко (2), И. Шарыгин (4), Д. Ботин и И. Ященко (6).

1994 год. 6 класс: Д. Ботин (1–8), С. Токарев (7).

7 класс: А. Спивак (1), И. Ященко (2,3,5), Д. Ботин (4), А. Ковальджи (6).

1995 год. 6 класс: Д. Ботин (1), А. Ковальджи (2), И. Шарыгин (3,5), Е. Пронина (4), В. Ковальджи (6)

7 класс: Р. Федоров (1), Д. Ботин (2), И. Шарыгин (3), И. Ященко (4), А. Спивак (5), С. Маркелов (6).

1996 год. 6 класс: И. Шарыгин (2), Н. Васильев (3), А. Спивак (4,6), Д. Ботин (5).

7 класс: А. Галочкин (1), А. Ковальджи (3,5), С. Токарев (6).

1997 год. 6 класс: В. Замков (1), А. Спивак (2), А. Галочкин (3).

7 класс: С. Дориченко (1), И. Ященко (2), А. Ковальджи (3), А. Галочкин (4), А. Спивак и И. Ященко (5), А. Шень (6).

1990 год

5 класс

1. В парламенте некоторой страны две палаты, имеющие равное число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причём воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

2. Обязательно ли равны два треугольника, если они имеют по три равных угла и по две равные стороны?

3. 48 кузнецов должны подковать 60 лошадей. Какое наименьшее время они затратят на работу, если каждый кузнец тратит на 1 подкову 5 минут? (Лошадь не может стоять на двух ногах.)

4. Замостить плоскость одинаковыми а) пятиугольниками; б) семиугольниками.

5. Отметить 6 точек на плоскости так, чтобы от каждой на расстоянии 1 находилось ровно три точки.

6–7 классы

1. Раскрасить плоскость в три цвета так, чтобы на каждой прямой были точки не более, чем двух цветов, и каждый цвет был бы использован.

2. Найти множество середин всех отрезков, концы которых лежат а) на данной полуокружности; б) на диагоналях данного квадрата.

3. Можно ли из 13 кирпичей $1\times1\times2$ сложить куб $3\times3\times3$ с дыркой $1\times1\times1$ в центре?

4. Поставить в ряд а) 5 простых чисел, б) 6 простых чисел так, чтобы разности соседних чисел совпадали.

5. Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше, философов или математиков?

6. Внутри квадрата $ABCD$ расположен квадрат $KMXY$. Доказать, что середины отрезков AK, BM, CX и DY также являются вершинами квадрата.

1991 год

5–6 классы

1. Автобусный билет считается счастливым, если между его цифрами можно в нужных местах расставить знаки четырёх арифметических действий и скобки так, чтобы значение полученного выражения равнялось 100. Является ли счастливым билет №123456?

2. Электрик был вызван для ремонта гирлянды из четырёх соединённых последовательно лампочек, одна из которых перегорела. На вывинчивание любой лампочки из гирлянды уходит 10 секунд, на завинчивание — 10 секунд. Время, которое тратится на другие действия, пренебрежимо мало. За какое минимальное время электрик заведомо может найти неисправную лампочку, если у него есть одна запасная лампочка?

3. Как одним прямолинейным разрезом рассечь два лежащих на сковороде квадратных блина на две равные части каждый?

4. Подпольный миллионер Тарас Артёмов пришёл в Госбанк, чтобы обменять несколько 50- и 100-рублёвых купюр старого образца. Ему была выдана 1991 купюра более мелкого достоинства[1], причём среди них не было 10-рублёвых. Доказать, что его обсчитали.

5. Найти числа, равные удвоенной сумме своих цифр.

6. Метро города Урюпинска состоит из трёх линий и имеет по крайней мере две конечные станции и по крайней мере два пересадочных узла, причём ни одна из конечных станций не является пересадочной. С каждой линии на каждую можно перейти по крайней мере в двух местах.

Нарисовать пример такой схемы метро, если известно, что это можно сделать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя два раза один и тот же отрезок.

7 класс

1. См. задачу 1 для 5–6 классов.

2. См. задачу 4 для 5–6 классов.

3. В начале года винтики, шпунтики и гаечки продавались по одинаковой цене 1 рубль за 1 кг. 27 февраля Верховный Совет СССР принял закон о повышении цены на винтики на 50% и снижении цены на шпунтики на 50%. 28 февраля Верховный Совет РСФСР принял закон о снижении цены на вин-

[1] В 1991 году были купюры по 1, 3, 5, 10, 25, 50 и 100 рублей.

тики на 50% и повышении цены на шпунтики на 50%. Какой товар будет самым дорогим и какой самым дешёвым в марте?

4. Знайка пришёл в гости к братьям-близнецам Винтику и Шпунтику, зная, что один из них никогда не говорит правду, и спросил одного из них: «Ты Винтик?» «Да,» — ответил тот. Когда Знайка спросил об этом же второго, то получил столь же чёткий ответ и сразу определил, кто есть кто.

Кого из двоих звали Винтиком?

5. Даны две последовательности: 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2 и 3, 6, 12. В каждой из них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону.

а) Найти этот закон.

б) Найти все натуральные числа, переходящие сами в себя (по этому закону).

в) Доказать, что число 2^{1991} после нескольких переходов станет однозначным.

1992 год

5–6 классы

1. Три землекопа за два часа выкопали три ямы. Сколько ям выкопают шесть землекопов за пять часов?

2. На Нью-Васюковской валютной бирже за 11 тугриков дают 14 динаров, за 22 рупии — 21 динар, за 10 рупий — 3 талера, а за 5 крон — 2 талера. Сколько тугриков можно выменять за 13 крон?

3. Как, не отрывая карандаша от бумаги, провести шесть отрезков таким образом, чтобы оказались зачеркнутыми 16 точек, расположенных в вершинах квадратной сетки 4 на 4?

4. Петя и Витя ехали вниз по эскалатору. Посередине эскалатора хулиган Витя сорвал с Пети шапку и бросил ее на встречный эскалатор. Пострадавший Петя побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься вниз и вернуть шапку. Хитрый Витя побежал по эскалатору вниз, чтобы затем подняться вверх и успеть раньше Пети. Кто успеет раньше, если скорости ребят относительно эскалатора постоянны и не зависят от направления движения?

7 класс

1. Три землекопа за три часа выкопали три ямы. Сколько ям выкопают шесть землекопов за пять часов?

2. В январе на 1 доллар можно было купить 40 винтиков или 60 шпунтиков. В феврале винтики и шпунтики стали продавать наборами из 25 винтиков и 25 шпунтиков по цене 1 доллар за набор. Для сборки трактора необходимо 600 винтиков и 600 шпунтиков. В каком месяце сборка трактора стоила дороже, если другие затраты не изменились?

3. Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

4. Может ли горящая в комнате свеча не освещать полностью ни одну из ее стен, если в комнате а) 10 стен, б) 6 стен?

5. См. задачу 4 для 5–6 классов.

1993 год

5–6 классы

1. Инопланетянин со звезды Тау Кита, прилетев на землю в понедельник, воскликнул: «А!». Во вторник он воскликнул: «АУ!», в среду — «АУУА!», в четверг — «АУУАУААУ!». Что он воскликнет в субботу?

2. Мосметрострой нанял двух землекопов для рытья туннеля. Один из них может за час прокопать вдвое больше, чем другой, а платят по договору каждому одинаково за каждый час работы. Что обойдётся дешевле — совместная работа землекопов с двух сторон до встречи или поочередное рытьё половины туннеля каждым из землекопов?

3. Как из семи «уголков», каждый из которых склеен из трёх кубиков $1 \times 1 \times 1$, и шести отдельных кубиков $1 \times 1 \times 1$ составить большой куб $3 \times 3 \times 3$?

Можно ли это сделать так, чтобы все отдельные кубики оказались в серединах граней большого куба?

4. Если у числа x подсчитать сумму цифр и с полученным числом повторить это ещё два раза, то получится ещё три числа. Найти самое маленькое x, для которого все четыре числа различны, а последнее из них равно 2.

5. Дядя Фёдор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин сидят на скамейке. Если Шарик, сидящий справа от всех, сядет между дядей Фёдором и котом, то кот станет крайним слева. В каком порядке они сидят?

6. Квадрат $ABCD$ со стороной 2 и квадрат $DEFK$ со стороной 1 стоят рядом на верхней стороне AK квадрата $AKLM$ со стороной 3. Между парами точек A и E, B и F, C и K, D и L натянуты паутинки. Паук поднимается снизу вверх по маршруту $AEFB$ и спускается по маршруту $CKDL$. Какой маршрут короче?

7. Али-баба стоит с большим мешком монет в углу пустой прямоугольной пещеры размером $m \times n$ клеток, раскрашенных в шахматном порядке. Из любой клетки он может сделать шаг в любую из четырех соседних клеток (вверх, вниз, вправо или влево). При этом он должен либо положить 1 монету в этой клетке, либо забрать из нее 1 монету, если, конечно, она не пуста. Может ли после прогулки Али-бабы по пещере оказаться, что на черных клетках лежит ровно по 1 монете, а на белых — монет нет?

8. В спортклубе тренируются 100 толстяков весом от 1 до 100 кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить так, чтобы ни в одной команде не было двух толстяков, один из которых весит вдвое больше другого?

7 класс

1. Можно ли в центры 16 клеток шахматной доски 8×8 вбить гвозди так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

2. Зная, что число 1993 простое, выяснить, существуют ли такие натуральные числа x и y, что

а) $x^2 - y^2 = 1993$;

б) $x^3 - y^3 = 1993$;

в) $x^4 - y^4 = 1993$.

3. Решить уравнение:

$$1993 = 1+8 : (1+8 : (1-8 : (1+4 : (1-4 : (1-8 : x))))).$$

4. В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырёхугольника получились числа: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна длина измеренной диагонали?

5. Гулливер попал в страну лилипутов, имея 7 000 000 рублей. На все деньги он сразу купил кефир в бутылках по цене 7 рублей за бутылку (пустая бутылка стоила в то время 1 рубль). Выпив весь кефир, он сдал бутылки и на все вырученные деньги сразу купил кефир. При этом он заметил, что и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки выросли в два раза. Затем он снова выпил весь кефир, сдал бутылки, на все вырученные деньги снова купил кефир и т. д. При этом между каждыми двумя посещениями магазина и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки возрастали в два раза. Сколько бутылок кефира выпил Гулливер?

6. Из кубика Рубика $3 \times \times 3 \times 3$ удалили центральный шарнир и восемь угловых кубиков. Можно ли оставшуюся фигуру из 18 кубиков составить из шести брусков размером $3 \times 1 \times 1$?

1994 год

6 класс

1. Среди четырех людей нет трех с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли так быть?

2. Найти в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, ... число, стоящее а) на 6-м; б) на 1994-м месте. Ответ объяснить.

3. Несколько одинаковых по численности бригад сторожей спали одинаковое число ночей. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше, чем число бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 человеко-ночь?

4. Составить куб $3 \times 3 \times 3$ из красных, желтых и зеленых кубиков $1 \times 1 \times 1$ так, чтобы в любом бруске $3 \times 1 \times 1$ были кубики всех трех цветов.

5. Разрезать квадрат на три части, из которых можно сложить треугольник с тремя острыми углами и тремя различными сторонами.

6. Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком, причем Катя выпила четверть всего молока и шестую часть всего кофе. Сколько человек в семье?

7. Среди любых десяти из шестидесяти школьников найдутся три одноклассника. Обязательно ли среди них найдутся а) 15 одноклассников; б) 16 одноклассников?

8. Пешеход обошел шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

7 класс

1. За два года завод снизил объем выпускаемой продукции на 51%. При этом каждый год объем выпускаемой продукции снижался на одно и то же число процентов. На сколько?

2. Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нем 105 квартир?

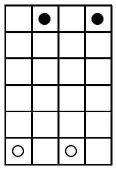
а) Найдите хотя бы одно решение.

б) Найдите все решения и докажите, что других нет.

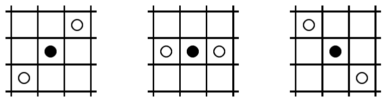
$$\begin{array}{r} \text{АБВ} \\ +\ \text{ГДЕ} \\ \hline \text{ЁЖЗИ} \end{array}$$

3. Когда Незнайку попросили придумать задачу для математической олимпиады в Солнечном городе, он написал ребус (см. рисунок). Можно ли его решить? (Разным буквам должны соответствовать разные цифры.)

4. Имеется много красных, желтых и зеленых кубиков $1\times1\times1$. Можно ли сложить из них куб $3\times3\times3$ так, чтобы в каждом блоке $3\times1\times1$ присутствовали все три цвета?



5. На доске 4×6 клеток стоят две черные фишки (Ванины) и две белые фишки (Сережины), см. рисунок. Ваня и Сережа по очереди двигают любую из своих фишек на одну клетку вперед (по вертикали). Начинает Ваня. Если после хода любого из ребят черная фишка окажется между двумя белыми по горизонтали или по диагонали (как на этих рисунках), она считается убитой и снимается с доски.



Ваня хочет провести обе свои фишки с верхней горизонтали доски на нижнюю. Может ли Сережа ему помешать?

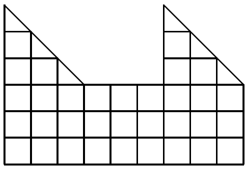
6. В одной из школ 20 раз проводился кружок по астрономии. На каждом занятии присутствовало ровно 6 школьников, причем никакие два школьника не встречались на кружке более одного раза. Доказать, что всего на кружке побывало не менее 20 школьников.

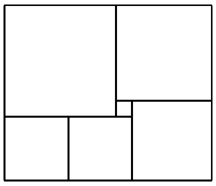
1995 год

6 класс

1. После того, как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от полученного уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?

2. Разрезать изображенную на левом рисунке фигуру на две одинаковые части.





3. Прямоугольник составлен из шести квадратов (см. рисунок). Найти сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.

$$\begin{array}{r} \times \quad 1995 \\ *** \\ \hline ***** \\ *\text{ГОД} \\ \hline \text{СВИНЬИ} \end{array}$$

4. Заменить разные буквы разными цифрами, одинаковые — одинаковыми, а звездочки — любыми так, чтобы получился правильный пример на умножение.

5. Есть 9 борцов разной силы. В поединке любых двух из них всегда побеждает сильнейший. Можно ли разбить их на три команды по три борца так, чтобы во встречах команд по системе «каждый с каждым» первая команда по числу побед одержала верх над второй, вторая — над третьей, а третья — над первой?

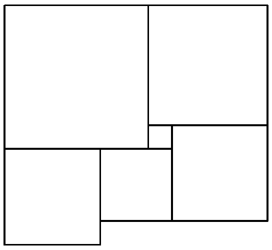
6. В квадрате 6×6 отмечают несколько клеток так, что из любой отмеченной можно пройти в любую другую отмеченную, переходя только через общие стороны отмеченных клеток. Отмеченную клетку называют концевой, если она граничит по стороне ровно с одной отмеченной. Отметить несколько клеток так, чтобы получилось а) 10, б) 11, в) 12 концевых клеток.

7 класс

1. Натуральное число умножили на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найти исходное число.

2. Один сапфир и два топаза
ценней, чем изумруд, в три раза.
А семь сапфиров и топаз
его ценнее в восемь раз.
Определить мы просим Вас,
сапфир ценнее иль топаз?

3. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найти сторону левого нижнего, если сторона самого маленького равна 1.

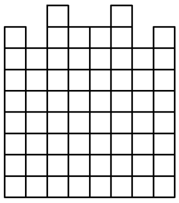


4. Расставить скобки так, чтобы получилось верное равенство:

$$1 - 2 \cdot 3 + 4 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9 = 1995.$$

5. Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и т. д. После одиннадцати таких вычитаний впервые получился нуль. С какого числа начинали?

6. Разрезать изображенную фигуру на две части, из которых можно сложить целый квадрат 8×8.



1996 год

6 класс

1. В двух кошельках лежат две монеты, причем в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Как это может быть?

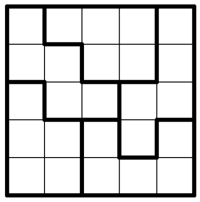
2. Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик, но на 20% меньше, чем Вася. На сколько процентов больше, чем Алик, собрал грибов Вася?

3. Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятерка?

4. Три человека A, B, C пересчитали кучу шариков четырех цветов. При этом каждый из них правильно различал какие-то два цвета, а два других мог путать: один путал красный и оранжевый, другой — оранжевый и желтый, а третий — желтый и зеленый. Результаты их подсчетов приведены в таблице. Сколько каких шариков было на самом деле?

	красный	оранжевый	желтый	зеленый
A	2	5	7	9
B	2	4	9	8
C	4	2	8	9

5. Можно ли разрезать на четыре остроугольных треугольника а) какой-нибудь выпуклый пятиугольник, б) правильный пятиугольник.



6. Покрасить клетки доски 5×5 в 5 цветов так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждом выделенном блоке все цвета встречались ровно по одному разу.

7 класс

1. По кругу расставлены цифры $1, 2, 3, \ldots, 9$ в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трехзначное число. Найти сумму всех девяти таких чисел. Зависит ли она от порядка, в котором записаны цифры?

2. Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет (отдал второму), потом второй проиграл половину своих, потом снова первый проиграл половину своих. В результате у первого оказалось 15 монет, а у второго — 33. Сколько монет было у первого пирата до игры?

3. Найти хотя бы две пары натуральных чисел, для которых верно равенство $2x^3 = y^4$.

4. Сколькими способами можно прочитать в таблице слово а) крона б) корень, начиная с буквы «к» и двигаясь вправо или вниз.

К	Р	О	Н	А				К
Р	О	Н	А				К	О
О	Н	А				К	О	Р
Н	А				К	О	Р	Е
А				К	О	Р	Е	Н
			К	О	Р	Е	Н	Ь

5. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

6. Произведение последовательных чисел от 1 до n называется n-факториал и обозначается $n!$ $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!)$. Можно ли вычеркнуть из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$ один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

1997 год

6 класс

$$\begin{array}{r} 314159 \\ +\;291828 \\ \hline 585787 \end{array}$$

1. Витя выложил из карточек пример на сложение и затем поменял местами две карточки. Как видите, равенство нарушилось. Какие карточки переставил Витя?

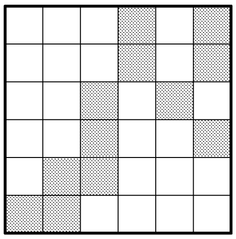
2. В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в сумму дробей с числителем 1, например,

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}.$$

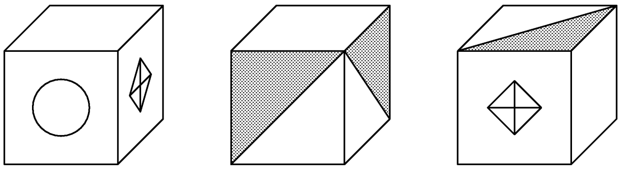
Один из знаменателей здесь заменен буквой x. Найти этот знаменатель.

3. В корзине лежат 30 грибов — рыжиков и груздей. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

4. Разрезать изображенную на рисунке доску на 4 одинаковые части, чтобы каждая из них содержала 3 заштрихованные клетки.



5. Придумать раскраску граней кубика, чтобы в трех различных положениях он выглядел, как показано на рисунке. (Укажите, как раскрасить невидимые грани, или нарисуйте развертку.)



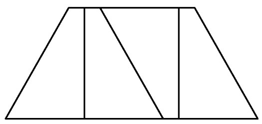
6. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2, малыш — за 5, а бабушка — за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя.)

7 класс

1. Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.)

2. В Мексике экологи добились принятия закона, по которому каждый автомобиль хотя бы один день в неделю не должен ездить (владелец сообщает полиции номер автомобиля и «выходной» день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый — по своим делам!). Сколько автомобилей должно быть в семье, если взрослых в ней а) 5 человек? б) 8 человек?

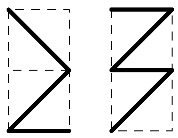
3. Четырехугольник с длинами сторон 1, 1, 1 и 2 имеет две параллельные стороны и разбит на четыре одинаковые фигуры (см. рисунок). В результате верхняя сторона разделилась на четыре отрезка. Найти отношение длины большего отрезка к меньшему.



4. В корзине лежат 30 грибов. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

5. В тесте к каждому вопросу указаны 5 вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удается списать, он отвечает правильно, а в противном случае — наугад (то есть среди несписанных вопросов он правильно отвечает на 1/5 часть). За год двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

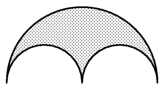
6. Если смотреть на аквариум спереди, то рыбка проплыла, как показано на левом рисунке. А если справа — то как на правом рисунке. Нарисовать вид сверху.



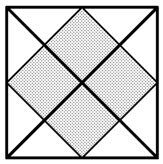
1990 год

5 класс. **2.** Не обязательно. **3.** 25 минут.

6–7 классы. **2.** См. рисунок.



а) Фигура, ограниченная данной полуокружностью и двумя полуокружностями, построенными на половинках диаметра исходной «внутри» нее.



б) Квадрат, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата.

3. Нельзя. **4.** а) 5, 11, 17, 23, 29; б) 7, 37, 67, 97, 127, 157. **5.** Если есть хотя бы один философ или математик, то философов больше.

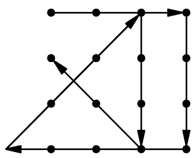
1991 год

5–6 классы. **1.** Да. **2.** 60 секунд. **5.** 0; 18.

7 класс. **3.** Цена на гаечки не изменится, и они окажутся самыми дорогими, а винтики и шпунтики будут стоить по 75 коп. **4.** Второго. **5.** а) Удвоенная сумма цифр. б) 18.

1992 год

5–6 классы. **1.** 15 ям. **2.** 13. **3.** См. рисунок. **4.** Если скорости ребят как минимум вдвое больше, чем скорость эскалатора, то они добегут до шапки одновременно. Иначе, первым придет Витя.



7 класс. **1.** 10 ям. **2.** В январе. **3.** Нет. **4.** Да, может.

1993 год

5–6 классы. **1.** «АУУАУААУУААУАУУАУААУАУУААУУАУААУ!» **2.** Совместная работа — «до встречи» — обойдётся дешевле. **3.** Ответ на второй вопрос: «Нельзя». **4.** 2999. **5.** (Слева направо) Матроскин, дядя Фёдор, Печкин, Шарик. **6.** Длины маршрутов равны. **7.** Да. **8.** На две команды.

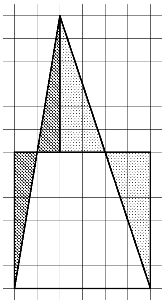
7 класс. **1.** Да. **2.** а) да; б) нет; в) нет. **3.** 9. **4.** 2,8. **5.** 1 166 666. **6.** Да, см. рисунок.

1994 год

6 класс. **1.** Да, может. Например:

Андрей Васильевич Иванов,
Андрей Геннадиевич Петров,
Борис Геннадиевич Иванов,
Борис Васильевич Петров.

2. а) 42; б) $1994 \cdot 1995 = 3978030$. **3.** 7. **5.** См. рисунок (равные части заштрихованы одинаково). **6.** 5 человек. **7.** а) Да; б) нет. **8.** Да.

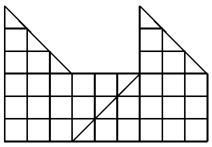


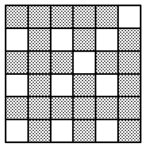
7 класс. **1.** на 30%. **2.** 7. **3.** $879 + {}$ ${}+ 426 = 1305$. **4.** Можно, см. решение задачи 4 для 6-го класса. **5.** Нет.

1995 год

6 класс. **1.** На одну четверть. **2.** См. левый рисунок. **3.** 7.

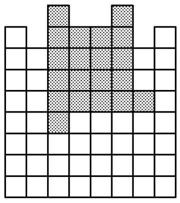
4.
$$\begin{array}{r} \times\; 1995 \\ 308 \\ \hline 11970 \\ 5985 \\ \hline 610470 \end{array}$$





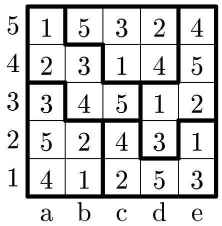
5. Да, можно. **6.** См. правый рисунок.

7 класс. **1.** $57 \cdot 5 \cdot 7 = 1995$. **2.** Одинаково. **3.** 4. **4.** $(1-2)\cdot 3 + {}$ ${}+(4+5\cdot 6\cdot 7+8)\cdot 9 = 1995$. **5.** Любое число от 100 до 109.
6. См. рисунок.



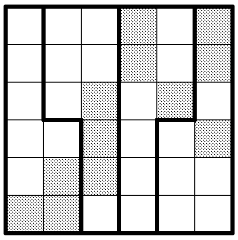
1996 год

6 класс. **1.** Один кошелек лежит внутри другого. **2.** На 50%. **3.** Поровну. **5.** а) Да; б) нет. **6.** См. рисунок.

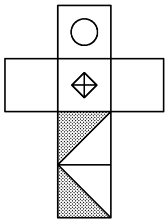


7 класс. **1.** 4995. **2.** 24. **3.** $x = 2$, $y = 2$; $x = 32$, $y = 16$. **4.** а) 32; б) 64. **5.** 20. **6.** Да, например, можно вычеркнуть 50!

1997 год

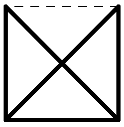


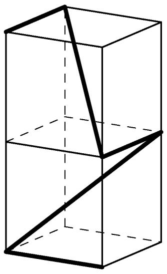
6 класс. **1.** $\begin{array}{r} 314159 \\ +\,291828 \\ \hline 585787 \end{array}$ **2.** 365.
3. 19 рыжиков и 11 груздей.
4. См. верхний рисунок.
5. См. нижний рисунок.
6. Ошибки в условии нет! Это сделать можно!



(Пожалуйста, порешайте еще эту замечательную задачу, даже если вы уже абсолютно уверены, что решения не существует! И только потом посмотрите в указание и решение.)

7 класс. **1.** Поровну. **2.** а) 6; б) 10. **3.** 5. **4.** 19 рыжиков и 11 груздей. **5.** 3/8. **6.** Как плавала рыбка, показано на правом рисунке, а вид сверху — на левом.





1990 год

5 класс

1. Чётность суммы двух чисел равна чётности их разности.

3. Сначала решите задачу для четырех кузнецов и пяти лошадей.

4. Квадрат можно разбить на два одинаковых пятиугольника или семиугольника.

6–7 классы

1. Нарисуйте две пересекающиеся прямые.

3. Раскрасьте в белый и чёрный цвет в шахматном порядке маленькие кубики $1 \times 1 \times 1$, из которых состоят куб и кирпичи.

5. Рассмотрите людей, являющихся математиками и философами одновременно.

6. Строгого решения этой задачи не требуется. Достаточно интуитивного обоснования. Рассмотрите сначала более простой случай, когда центры квадратов совпадают. Затем вырежьте меньший квадрат из картона и подвигайте его внутри большого квадрата, следя за перемещениями середин интересующих нас отрезков.

1991 год

5–6 классы

2. Если после замены одной лампочки гирлянда не загорелась, то мы заменили исправную лампочку.

3. Любая прямая, проходящая через центр квадрата, делит его пополам.

4. Сумма любого числа четных чесел четная, а нечетного числа нечетных — нечетная.

5. Если первая цифра двузначного числа равна a, а вторая равна b, то само число равно $10a + b$.

6. Не забудьте, что бывают кольцевые линии.

7 класс

4. Если бы они ответили одинаково, то Знайка никак не мог бы их различить.

1992 год

5–6 классы

1. Посчитайте сначала, сколько ям выкопают 6 землекопов за 2 часа.

2. За 5 крон дают два талера, значит, за одну крону дают 2/5 талера или $(2/5) \cdot (10/3)$ рупии.

4. Два встречных эскалатора можно представить себе, как движущееся с постоянной скоростью кольцо, относительно которого шапка неподвижна. Посмотрите на происходящее с точки зрения шапки.

7 класс

1. Посчитайте сначала, сколько ям выкопают 6 землекопов за 3 часа.

3. Посчитайте двумя способами число подписей под всеми ДВУсторонними соглашениями. И подумайте, может ли оно быть нечетным?

1993 год

5–6 классы

1. Разбейте «следующее» высказывание пополам и сравните с «предыдущим».

2. Метр туннеля, выкопанный быстрым землекопом, обходится дешевле.

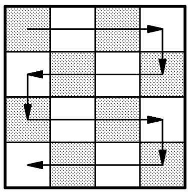
3. Внутренний центральный кубик граничит только с центральными кубиками граней.

4. Если $a < b$, то наименьшее число с суммой цифр a будет меньше, чем наименьшее число с суммой цифр b.

5. Матроскин и до пересадки был крайним слева.

6. $DL = BF$.

7. Заметьте, что прямоугольник $m \times n$ можно обойти «змейкой», проходя каждую клетку по одному разу (см. рисунок для прямоугольника 4×4). Кроме того, «усложните» задачу, запретив Али-бабе класть монету в клетку, где монета уже есть (то есть при ходе в клетку, где уже есть монета, он будет обязан ее забрать). Заметьте, что если Али-баба будет следовать этому правилу, то ни в какой клетке не может оказаться две монеты!



8. Рассмотрите все пары толстяков, которые не должны оказаться в одной команде. Кроме того, можно считать, что все 100 толстяков разного веса.

7 класс

2. Разложите левую часть на множители.

3. Упрощайте уравнение «снаружи» скобок, а не изнутри.

4. Примените неравенство треугольника: каждая из сторон треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше их разности.

5. Ведите расчеты в «твердой» валюте — пустых бутылках. Тогда не будет инфляции!

1994 год

6 класс

2. $2 = 1 \cdot 2$; $6 = 2 \cdot 3$.

3. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, причем это разложение единственно.

7 класс

1. Если объем выпускаемой продукции снизился на 51%, значит, он составил 49% от исходного, а 49 — это 7 в квадрате.

2. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, причем это разложение единственно.

3. Заметим, что Ё $= 1$, далее действуем подбором (решений много!). Попробуйте найти несколько решений!

5. Проведите (за Ваню) сначала среднюю фишку.

6. Из n школьников можно составить ровно $\dfrac{n(n-1)}{2}$ различных пар.

1995 год

6 класс

3. Сторона самого большого квадрата равна сумме сторон двух квадратов: следующего за ним по часовой стрелке и самого маленького.

5. Упорядочим наших девять борцов по силе и присвоим каждому «рейтинг» от 9 до 1: 9 — самому сильному и т. д. Тогда сумма рейтингов борцов равна 45. Постарайтесь составить команды так, чтобы суммы рейтингов борцов в командах были равны.

7 класс

1. Разложите число 1995 на простые множители.

3. См. решение задачи 3 для 6 класса.

5. Разность между числом и суммой его цифр делится на 9.

1996 год

6 класс

3. Сравните количество пятизначных чисел, делящихся на пять, и количество пятизначных чисел, у которых хотя бы одна из первых двух цифр слева — пятерка.

5. б) Каждая сторона пятиугольника содержит сторону одного из треугольников. Все углы правильного пятиугольника тупые.

6. Скажем, что часть клеток раскрашена правильно, если их раскраска не противоречит условию задачи. Есть такие клетки, что если их раскрасить правильно, то правильная раскраска остальных клеток восстанавливается однозначно (одна за другой).

7 класс

1. В наших числах каждая цифра появляется ровно по одному разу в каждом из разрядов — сотен, десятков и единиц.

2. Попробуйте проследить «с конца», сколько у какого пирата было монет после каждой игры.

3. Заметив, что $x = 2$, $y = 2$ — решение, попробуйте найти еще одно в виде $x = 2^k$, $y = 2^n$.

4. Запишите каждый путь последовательностью нулей и единиц.

5. Подсчитайте двумя способами количество границ белых лоскутков с черными.

6. Посмотрите, сколько раз входит каждое число от 2 до 100 в наше произведение.

1997 год

6 класс

3. Рыжиков не больше 19.

4. Разрежьте доску пополам по вертикали.

6. Вроде очевидно, что быстрее всего будет получаться, если фонарик все время будет носить обратно папа. Но это неверно, и такой путь «тупиковый». Дайте разочек отнести фонарик обратно маме (хотя это и невоспитанность). И пустите вместе самых медленных — бабушку с малышом.

7 класс

1. Если периметр прямоугольника равен 1996, то сумма длин его соседних сторон равна 998.

2. б) Если каждый день «отдыхает» не более одного автомобиля, то всего автомобилей не более 7.

5. Двоечник мог ошибиться только в тех вопросах, на которые отвечал наугад.

1990 год

5 класс

1. Общее число депутатов в обеих палатах четное. Так как в голосовании приняли участие все депутаты и не было воздержавшихся, то сумма голосов «за» и «против» равна общему числу депутатов и поэтому четная. Значит, и разность голосов «за» и «против» тоже должна быть чётной, ведь она отличается от суммы на удвоенное число голосов «против» ($a + b = a - b + 2b$). А 23 — нечетное число. Противоречие.

2. Не обязательно. Возьмем треугольник со сторонами 8 см, 12 см и 18 см и увеличим его в полтора раза (например, с помощью ксерокса). Получится треугольник с такими же углами, а стороны у него будут равны 12 см, 18 см и 27 см. (Возможны и другие примеры неравных треугольников, удовлетворяющих условиям задачи.)

Утверждение о том, что если у двух треугольников пропорциональны стороны, то их углы равны, строго доказать не так просто. Для этого нужно знать, что такое преобразование подобия. На олимпиаде достаточно было сослаться на этот факт, как на интуитивно очевидный.

3. Задача состоит из двух частей: доказать, что за 25 минут управиться можно, и доказать, что быстрее выполнить работу нельзя. Начнем со второй части.

Всего у 60 лошадей 240 ног. Если бы всю работу делал один кузнец, то ему бы потребовалось $240 \times 5 = 1200$ минут. Значит, 48 кузнецов никак не смогут выполнить всю работу быстрее, чем за $1200 : 48 = 25$ минут.

Покажем теперь, как можно подковать всех лошадей за 25 минут. Разобьем кузнецов на 12 бригад по 4 кузнеца в каждой и выделим каждой бригаде по 5 лошадей. Каждая бригада сможет подковать «своих» лошадей за 25 минут следующим образом. Организуем конвейер, назначив каждого кузнеца «ответственным» за определенную ногу лошади.

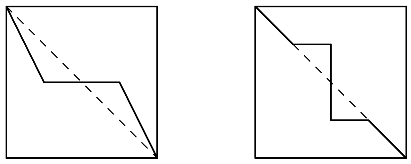
Первые пять минут первый кузнец подковывает переднюю правую ногу первой лошади, второй — переднюю левую второй лошади, третий — заднюю правую третьей, четвертый — заднюю левую четвертой, а пятая лошадь отдыхает.

Затем сдвигаем лошадей «по кругу». Вторые пять минут первый кузнец подковывает переднюю правую ногу пятой лошади, второй — переднюю левую первой лошади, третий — заднюю правую второй, четвертый — заднюю левую третьей, а четвертая лошадь отдыхает.

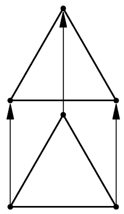
Третьи пять минут первый кузнец подковывает переднюю правую ногу четвертой лошади, второй — переднюю левую пятой лошади, третий — заднюю правую первой, четвертый — заднюю левую второй, а третья лошадь отдыхает.

Продолжив работу по этой схеме, каждая бригада подкует «своих» лошадей за 25 минут, а, значит, 48 кузнецов подкуют 60 лошадей за 25 минут.

4. Замостим плоскость одинаковыми квадратиками (лист в «клеточку»), а теперь разобьем каждый квадратик на два одинаковых пятиугольника (пункт а) или семиугольника (пункт б), как показано на рисунке.



5. Нарисуем равносторонний треугольник со стороной 1 и сдвинем его «вверх» (или в любую другую сторону, только не под углом 60° к стороне) на 1 (см. рисунок). Вершины этих двух треугольников мы и отмечаем: они удовлетворяют условию задачи.



Задачу можно решить и по-другому. Сделаем из проволоки два равносторонних треугольника со стороной 1. Расположим их в пространстве один над другим на расстоянии 1 и соединим соответствующие вершины проволокой (получается так называемая треугольная призма). Теперь «аккуратно положим» этот проволочный каркас на плоскость.

6–7 классы

1. На белом листе бумаги проведем синей ручкой две пересекающиеся прямые, а их точку пересечения отметим черной ручкой.

3. Раскрасим в белый и чёрный цвет в шахматном порядке маленькие кубики $1 \times 1 \times 1$, из которых состоят куб и кирпичи. В 13 кирпичах поровну (по 13) чёрных и белых кубиков, а в кубе $3 \times 3 \times 3$ без центра одних — 12, а других — 14.

4. «Просеем» все числа от 1 до 200 через «решето Эратосфена». Для этого зачеркнем сначала все числа, делящиеся на 2, потом — делящиеся на 3, (на 4 не надо! Почему?), потом — делящиеся на 5 и т. д. Останутся незачеркнутыми только простые числа (объясните, почему!). Такой метод выписывания всех простых чисел и называется решетом Эратосфена.

Теперь найти нужные последовательности не так уж и сложно.

Поиск упростится, если заметить следующую закономерность. Пусть есть три простых числа с одинаковой разностью между ними, тогда эта разность — четная (почему?). Если таких простых чисел четыре, то разность делится еще и на 3 — а, значит, уже и на 6. (Подсказка: посмотрите на остатки от деления на 3). А если таких простых чисел шесть, то разность делится еще и на 5! Доказать строго это не очень просто. Но нам не нужно в данной задаче это доказывать — а интуитивное ощущение, что такой факт верен, может очень ускорить поиск.

5. Обозначим через x число людей, являющихся математиками и философами одновременно. Тогда число математиков равно $7x$, а число философов — $9x$.

Если $x \neq 0$, то философов больше. А что значит, что $x = 0$? Это значит, что ни тех, ни других нет вообще, то есть их «поровну». Это правильный ответ, формально удовлетворяющий условию задачи. И те, кто его указал, вдвойне молодцы! Хотя решение засчитывалось и тем, кто разобрал только случай, когда математики все-таки есть.

6. Если маленький квадрат сдвинуть (без вращения) так, чтобы его центр совпал с центром большого квадрата, то середины всех четырех отрезков AK, BM, CX и DY сдвинутся (одинаково!) на половину длины сдвига маленького квадрата. Поэтому, если они стали вершинами некоторого квадрата, то и до сдвига они были вершинами некоторого квадрата. Осталось заметить, что если центры квадратов совпадают, то вся «картинка» переходит в себя при поворотах на $90°$, $180°$ и $270°$.

1991 год

5–6 классы

1. $1 + (2 + 3 + 4) \cdot (5 + 6) = 100$. Есть и другие решения (попробуйте найти еще хотя бы одно).

2. Предположим, что мы не заменяли какие-то две лампочки. Тогда, если нам не повезло и одна из них — перегоревшая, то мы не сможем определить, какая именно. Значит, для того, чтобы заведомо определить перегоревшую лампочку, необходимо вывинтить хотя бы три из них (30 секунд) и завинтить на их место какие-то другие (еще 30 секунд).

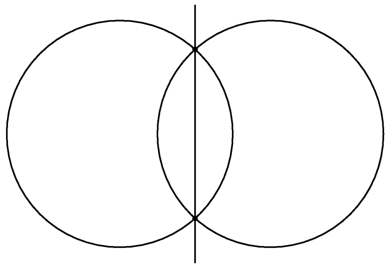
Покажем, что 60 секунд всегда хватит. Вывинтим первую лампочку и завинтим на ее место запасную (прошло 20 секунд). Если гирлянда загорелась, то нам повезло и хватило даже 20 секунд. Если же гирлянда не загорелась, значит, единственная неисправная лампочка еще в гирлянде, а у нас в руках опять исправная. Теперь вывинтим вторую и завинтим на ее место бывшую первую (в сумме прошло 40 секунд). Если нам опять не повезло, то вывинчиваем третью лампочку, а на ее место завинчиваем бывшую вторую (в сумме прошло 60 секунд). Если гирлянда все еще не горит, то, значит, неисправна последняя лампочка. Решение засчитывалось и тем школьникам, которые добавляли еще 20 секунд на замену последней лампочки.

3. Любая прямая, проходящая через центр квадрата, делит его пополам. Поэтому надо провести разрез через центры обоих квадратов.

4. Сумма любого числа четных чисел четная, а нечетного числа нечетных — нечетная. Значит, исходная сумма денег (сумма какого-то числа 50-рублевых и 100-рублевых купюр) — четная, а полученная сумма денег (сумма 1991 купюры по 1, 3, 5 или 25 рублей) — нечетная.

5. Легко заметить, что однозначных чисел, больших нуля, с требуемым свойством нет. Попробуем найти решение среди двузначных чисел. Если первая цифра двузначного числа равна a, а вторая равна b, то само число равно $10a+b$. Имеем $10a+b=2(a+b)$. Откуда $8a=b$ или $a=1$, $b=8$.

Можно показать, что других решений нет (идея: самое маленькое трехзначное число — 100, а самая большая сумма трех цифр $9+9+9=27$). Но это на олимпиаде не требовалось.



6. См. рисунок.

7 класс

1. См. решение задачи 1 для 5–6 классов.

2. См. решение задачи 4 для 5–6 классов.

4. Если бы они ответили одинаково, то Знайка никак не мог бы их различить. Значит, второй ответил: «нет». Теперь, если бы Винтиком был первый, то получилось бы, что оба сказали правду. А это противоречит условию. Значит, Винтик — второй и они оба соврали (что условием не запрещено).

5. а) Закон можно угадать, заметив, например, что пока число однозначное, оно удваивается, а потом — вроде нет. А то, что 10 переходит в 2, наводит на мысль, что удваивается не само число, а сумма его цифр. Итак, искомый закон обнаружен: «Удвоенная сумма цифр».

Конечно, это не доказательство в строгом математическом смысле этого слова. Например, так можно «доказать», что число шестьдесят делится на все числа. Действительно, 60 делится на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на 6... Однако в задаче требовалось только найти «достаточно простое» правило, следуя которому можно получить такую последовательность.

А умение увидеть, почувствовать закономерность (что требовалось в данной задаче) не менее важно для математика, чем умение строго рассуждать! Если вы найдете какое-нибудь другой (но тоже «достаточно простой») закон, дающий две последовательности 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2 и 3, 6, 12, напишите, пожалуйста, нам (а на олимпиаде такое решение тоже было бы засчитано!).

б) См. решение задачи 5 для 5–6 классов.

в) Заметим, что если число не меньше, чем трехзначное, то его сумма цифр меньше самого числа. Значит, число будет уменьшаться, пока не станет двузначным или однозначным. Остается единственная опасность: попасть в «неподвижную точку» — 18. Но это в нашем случае невозможно, так как исходное число не делилось на 9 (докажите строго следующее свойство нашего закона получения одних чисел из других: если некоторое число делится на 9, то и число, из которого оно получено, тоже делится на 9).

1992 год

5–6 классы

1. Три землекопа за 2 часа выкопали 3 ямы, значит, шесть землекопов за 2 часа выкопают в два раза больше, то есть 6 ям. А шесть землекопов за 5 часов еще в два с половиной раза больше, то есть 15 ям.

2. За 5 крон дают два талера, значит, за одну крону дают 2/5 талера. Аналогично, за один талер дают 10/3 рупии, за одну рупию — 21/22 динара, за один динар — 11/14 тугрика. Получается, что за одну крону дают 2/5 талера, или $(2/5)\cdot(10/3)$ рупии, или $(2/5)\cdot(10/3)\cdot(21/22)$ динара, или $(2/5)\cdot(10/3)\cdot(21/22)\cdot(11/14)$ тугрика. Вычислив, получаем, что

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{21}{22}\cdot\frac{11}{14}=1.$$

Значит, за одну крону дают 1 тугрик, а за 13 крон, соответственно, — 13 тугриков.

4. Заметим, что два встречных эскалатора образуют движущееся с постоянной скоростью кольцо (на котором можно кататься, как на карусели), относительно которого шапка неподвижна. Встанем около шапки и понаблюдаем за бегом ребят. При этом можно считать, что эскалаторы стоят! И мы увидим, как ребята одновременно побегут к нам из диаметрально противоположной точки кольца с равными скоростями, но каждый со своей стороны. Теперь очевидно, что ребята прибегут к шапке одновременно. Вопрос: найти пробел в доказательстве. Подсказка: внимательно понаблюдайте за происходящим в случае, когда скорости ребят очень-очень маленькие (почти нулевые).

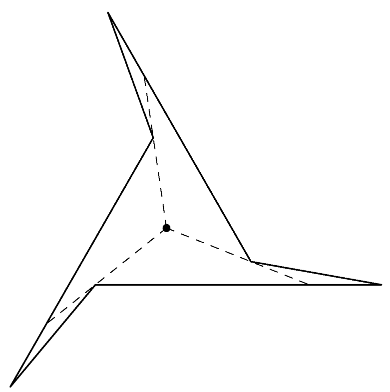
7 класс

1. Три землекопа за 3 часа выкопали 3 ямы, значит, шесть землекопов за 3 часа выкопают в два раза больше, то есть 6 ям. А шесть землекопов за 5 часов еще в 5/3 раза больше, то есть 10 ям.

2. В январе надо было потратить 10 долларов на 600 шпунтиков и 15 долларов на 600 винтиков, то есть всего 25 долларов. В феврале же надо купить 24 набора из 25 винтиков и 25 шпунтиков. Значит, в январе сборка трактора стоит на 1 доллар дороже.

3. Под каждым двусторонним соглашением между республиками стоят две подписи руководителей каждой из них. Значит, общее число подписей под всеми соглашениями — четное. С другой стороны, руководитель каждой из республик поставил подпись ровно под тремя соглашениями. А всего республик 15. Значит, всего подписей 45. Противоречие.

4. б) См. рисунок.



5. См. решение задачи 4 для 5–6 классов.

1993 год

5–6 классы

1. Разбив «следующее» высказывание на две равные части, мы видим, что первая половина совпадает с «предыдущим», а вторая получается из предыдущего «отражением в зеркале», то есть заменой букв А на буквы У и наоборот.

2. За один час работы быстрый землекоп выкапывает больше, а платят им одинаково. Значит, метр туннеля, выкопанный быстрым землекопом, обходится дешевле. В варианте до встречи на долю быстрого придется половина туннеля и еще часть, а в другом варианте — только половина. Значит, дешевле копать до встречи. Отметим, что ответ не зависит от того, во сколько именно раз отличаются скорости землекопов.

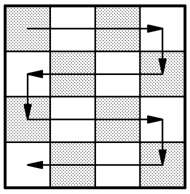
3. Внутренний центральный кубик граничит только с центральными кубиками граней. Поэтому, если все шесть отдельных маленьких кубиков поместить в центры граней большого, то внутренний центральный кубик станет «изолированным» и не сможет быть частью никакого уголка. А седьмого отдельного маленького у нас нет!

4. Докажем сначала, что если $a < b$, то наименьшее число с суммой цифр a будет меньше, чем наименьшее число с суммой цифр b. Пусть B — наименьшее число с суммой цифр b. Если уменьшить на 1 любую ненулевую цифру числа B, то сумма цифр уменьшится ровно на 1 и само число тоже уменьшится. Значит, после нескольких (а именно, $b-a$) таких операций мы получим число, меньшее B, с суммой цифр, в точности равной a. Значит, и наименьшее число с суммой цифр, равной a, будет меньше, чем B. Теперь мы легко можем решить задачу. Наименьшее число с суммой цифр, равной 2, — это 11. Наименьшее число с суммой цифр, равной 11, — это 29, а наименьшее число с суммой цифр 29 — это 2999.

5. По условию, крайний справа — это Шарик. В частности, он сидит правее Матроскина. После пересадки Шарика слева от Матроскина никого не оказалось. Значит, там никого и не было! То есть, крайний слева — это Матроскин. Рядом с ним, по условию, — дядя Федор. Ну а потом, на единственном оставшемся свободным месте — почтальон.

6. Заметим, что $AD = CD = 2$, $ED = DK = 1$. Поэтому два прямоугольных треугольника AED и CKD равны. А значит, равны и отрезки AE и CK. Равенство этих отрезков можно также легко заметить, если нарисовать чертеж на клетчатой бумаге — они будут диагоналями равных прямоугольников размера 2×1. Аналогично, $FB = DL$. Кроме того, $EF = KD$ как стороны квадрата. Поэтому $AE + EF + FB = CK + KD + DL$.

7. Заметим, что прямоугольник $m \times n$ можно обойти «змейкой», проходя каждую клетку по одному разу (см. рисунок для прямоугольника 4×4). Кроме того, «усложним» задачу, запретив Али-бабе класть монету в клетку, где монета уже есть (то есть при



ходе в клетку, где уже есть монета, он будет обязан ее забрать). Заметим, что если Али-баба будет следовать этому правилу, то ни в какой клетке не может оказаться две монеты!

Итак, пойдем по пещере (вместе с Али-бабой) «змейкой» с мешком монет и будем стараться, чтобы в каждой клетке оказалось требуемое (правильное) количество монет. Сделав очередной ход, будем проверять, правильное ли количество монет на клетке, с которой мы только что ушли. Если правильное, то будем спокойно идти дальше. А если неправильное, то возможно только два варианта: 0 вместо 1 и 1 вместо 0 (ведь Али-баба следует нашему дополнительному правилу!). Сделаем шаг назад и либо возьмем монету (если она там была), либо положим монету (если монеты там не было), а потом сделаем шаг вперед. Теперь в клетке, с которой мы только что ушли, стало правильное количество монет, и можно спокойно идти дальше.

Так, клетка за клеткой, мы добьемся того, что на всех клетках, кроме, может быть, самой последней — правильное количество монет. Если на последней клетке неправильное количество монет, то (сообразите сами — почему), пойдя назад, вперед и назад, мы добьемся, что на всех клетках будет правильное количество монет.

8. Заметим, что наличие толстяков одинакового веса только упрощает задачу. Действительно, с каждым толстяком можно поместить в команду всех толстяков того же веса. При этом условие задачи попрежнему будет выполнено. Значит, можно считать, что все 100 толстяков разного веса.

В частности, у каждого толстяка есть не более, чем один товарищ, который вдвое легче него, и не более, чем один, который вдвое тяжелее него.

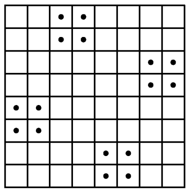
Теперь заставим наших толстяков взяться за руки: каждый из них подаст левую руку тому, который вдвое тяжелее него (если такой есть), а правую — тому, который вдвое легче него (если такой есть).

Получится, что вся сотня разобъётся на непересекающиеся «цепочки». Причем в каждой цепочке самый правый — это самый легкий, а самый левый — это самый тяжелый.

Раскрасим каждую цепочку в два цвета в шахматном порядке, начиная с самого легкого. Теперь сформируем две искомые команды по «цветному» признаку.

7 класс

1. См. рисунок.



2. а) Разложим левую часть на множители. Имеем: $(x-y)(x+y) = 1993$. То есть и $x-y$, и $x+y$ являются делителями числа 1993. Учитывая, что число 1993 простое (то есть делится только на себя и на 1), получаем: либо $x-y=1,\ x+y=1993$, либо $x-y=1993$, $x+y=1$. Второй случай, очевидно, невозможен для натуральных x и y, а в первом случае находим $x=997$, $y=996$.

б) Разложим левую часть на множители. Имеем: $(x-y)(x^2+xy+y^2)=1993$. Учитывая, что число 1993 простое, получаем: либо $x-y=1,\ x^2+xy+y^2=1993$, либо $x-y=1993$, $x^2+xy+y^2=1$. Решений нет.

в) Разложим левую часть на множители. Имеем: $(x^2-y^2)(x^2+y^2)=1993$. Учитывая, что число 1993 простое, получаем: либо $x^2-y^2=1,\ x^2+y^2=1993$, либо $x^2-y^2=1993,\ x^2+y^2=1$. Решений нет.

3. Будем упрощать уравнение «снаружи» скобок, а не изнутри.

$$1993 = 1+8:(1+8:(1-8:(1+4:(1-4:(1-8:x)))))$$

$$\frac{8}{1992} = 1+8:(1-8:(1+4:(1-4:(1-8:x))))$$

$$-\frac{249}{31} = 1-8:(1+4:(1-4:(1-8:x)))$$

$$\frac{31}{35} = 1+4:(1-4:(1-8:x))$$

$$
\begin{aligned}
-35 &= 1 - 4 : (1 - 8 : x)\\
\frac{4}{36} &= 1 - 8 : x\\
x &= 9.
\end{aligned}
$$

4. Будем применять неравенство треугольника для исключения невозможных случаев. Если длина диагонали равна 7,5, то оставшиеся четыре числа можно разбить на две пары так, что сумма чисел в каждой из них больше 7,5, но этого, очевидно, сделать нельзя. Аналогично, не подходит 5. Если длина диагонали равна 1, то оставшиеся четыре числа можно разбить на две пары так, что разность чисел в каждой из них меньше 1, но этого, очевидно, сделать нельзя. Аналогично, не подходит 2.

Остается единственный вариант — 2,8. Четырехугольник по условию существует. Поэтому, доказывать, что 2,8 на самом деле подходит, не обязательно (хотя и полезно, чтобы проверить свое решение или даже найти ошибку в условии!)

5. Заметим, что если все расчеты проводить в твердой валюте — пустых бутылках, — то инфляции не будет. То есть бутылка с кефиром будет все время стоить 7 пустых бутылок, а кефир в ней (без тары) — 6 пустых бутылок. Гулливер, имея в начале «денег» на 1 166 666 бутылок кефира (без тары) и еще 4 пустые бутылки, сможет проводить свои коммерческие операции до тех пор, пока не останется с четырьмя пустыми бутылками, сдав которые, он уже не сможет снова купить кефир.

1994 год

6 класс

2. Можно заметить, что $2 = 1 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 3 \cdot 4$, и предположить, что n-й член последовательности равен $n \cdot (n+1)$. Проверка на 4-м ($20 = 4 \cdot 5$) и 5-м ($30 = 5 \cdot 6$) членах последовательности показывает, что мы угадали. Значит, на шестом месте стоит число $6 \cdot 7 = 42$, а на 1994-м — $1994 \cdot 1995 = 3978030$.

Конечно, это не доказательство в строгом математическом смысле этого слова. Например, так можно «доказать», что число шестьдесят делится на все числа. Действительно, 60 делится на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на 6… Однако в задаче требовалось только найти достаточно простое правило, следуя которому можно получить такую последовательность. А умение увидеть, почувствовать закономерность (что требовалось в данной задаче) не менее важно для математика, чем умение строго рассуждать! Если вы найдете какое-нибудь другое (но тоже «достаточно простое») правило, дающее последовательность 2, 6, 12, 20, 30, напишите, пожалуйста, нам (а на олимпиаде такое решение тоже было бы засчитано!).

3. Обозначим через s число сторожей в бригаде, через b число бригад, а через n — число ночей, которые проспал один сторож. Тогда $s \cdot b \cdot n = 1001$. Но $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, причем числа $7, 11, 13$ — простые. Учитывая, что по условию $s < n < b$, получаем $s = 7$. Попробуйте теперь решить задачу 2 для 7-го класса!

4. Раскрасим куб по слоям следующим образом:

к	ж	з		з	к	ж		ж	з	к
з	к	ж		ж	з	к		к	ж	з
ж	з	к		к	ж	з		з	ж	к

6. Пусть n — число человек в семье, а x — количество выпитого молока (в чашках). Тогда количество выпитого кофе равно $n - x$. Катя выпила одну чашку кофе с молоком, которая состояла из одной четверти всего молока $\left(\dfrac{x}{4}\right)$ и одной шестой всего кофе $\left(\dfrac{n-x}{6}\right)$. Получаем

$$\begin{gathered}\frac{x}{4} + \frac{(n-x)}{6} = 1,\\ 3x + 2(n-x) = 12,\\ x + 2n = 12.\end{gathered}$$

Так как n — целое число, то из последнего равенства следует, что x — целое число, причем четное $(x = 12 - 2n)$. Кроме того, $x \leqslant n$, так как количество выпитого молока, конечно, не больше, чем общее количество напитка. Теперь небольшим перебором находим, что последнее уравнение имеет три решения:

$$n = 6,\ x = 0; \quad n = 5,\ x = 2; \quad n = 4,\ x = 4.$$

При этом первое и последнее решения отвечают случаю, когда все пили просто молоко или просто кофе, а второе — когда пили действительно кофе с молоком.

7. а) Разобьем всех 60 школьников на группы одноклассников. Если среди школьников нет 15 одноклассников, то в каждой группе не более 14 школьников.

Пусть k — число групп (назовем их большими), состоящих из двух и более школьников.

Из условия вытекает, что $k \leqslant 4$ (иначе, взяв двоих из каждой большой группы, мы получим не менее 10 школьников, среди которых не будет трех одноклассников). Поэтому возможны два случая: $k \leqslant 3$ и $k = 4$. Рассмотрим их.

1. Если $k \leqslant 3$, то общее число школьников в больших группах не превышает 42. Следовательно, найдется 18 школьников, которые не входят в большие группы, а значит, не имеют ни одного одноклассника! Противоречие с условием задачи.

2. Если $k = 4$, то общее число школьников в больших группах не превышает 56. Следовательно, найдутся 4 школьника, которые не имеют ни одного одноклассника! Взяв этих четверых и добавив к ним по двое из всех четырех больших групп, мы получим даже 12 школьников, среди которых не найдется трех одноклассников. Противоречие с условием задачи.

б) Не обязательно. Пример: четыре класса по 15 школьников.

8. Рассмотрим шесть улиц, выходящих из центра города в разных направлениях (то есть шесть отрезков с общим началом и без других общих точек). Пешеход может, выйдя из центра, пройти каждую улицу туда-обратно. Но, очевидно, пройти по каждой улице ровно один раз невозможно.

Можно привести пример и без тупиков: возьмем треугольник, отметим в нем точку и соединим ее с вершинами. Попробуйте сами доказать, что пешеход не сможет обойти эти улицы, пройдя каждую по одному разу.

Подсказка (теорема Эйлера): Пусть пешеход смог обойти все улицы некоторого города, пройдя каждую ровно по одному разу. Тогда на каждом перекрестке, кроме, быть может, того, с которого он начал, и того, на котором закончил, сходится четное число улиц. Попробуйте доказать это сами!

7 класс

1. Пусть за год выпуск снижался на $x\%$. Приняв исходный объем выпуска продукции за 1, получим, что через год выпуск продукции составил $\dfrac{100-x}{100}$ от исходного, а через два года — $\left(\dfrac{100-x}{100}\right)^2$ от исходного. С другой стороны, по условию выпуск продукции снизился на 51% и, значит, составил $\dfrac{49}{100}$ от исходного. Получаем, что $\left(\dfrac{100-x}{100}\right)^2 = \dfrac{49}{100}$. Откуда $\dfrac{100-x}{100} = \dfrac{7}{10}$, $x = 30$.

2. Обозначим через p число подъездов в доме, через f — число этажей, а через k — число квартир на этаже. Тогда $p \cdot f \cdot k = 105$. Но $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, причем числа $3, 5, 7$ — простые. Учитывая, что по условию $p < k < f$, получаем $f = 7$. Попробуйте теперь решить задачу 3 для 6 класса!

5. Проведем (за Ваню) сначала среднюю фишку (крайняя и так пройдет!). Будем двигать ее вперед, не обращая внимания на ходы Сережи. И она пройдет, что можно доказать перебором (немного поиграв — это сделали многие участники олимпиады)!

Приведем красивое строгое доказательство, не использующее перебора. Назовем номер горизонтали, на которой фишка стоит (считая снизу), ее высотой. Если Ванина фишка окажется между Сережиными, то ее удвоенная высота $2h$ будет равна сумме высот Сережиных фишек (если они на одной горизонтали, то это совсем очевидно; проверьте, что это верно и в том случае, когда Ванину фишку «зажали» по диагонали!).

Пусть это произошло после хода Сережи. Значит, ребята сделали равное число ходов — по n, и сумма высот Сережиных фишек равна $n + 2$, а высота Ваниной равна $6 - n$. Получаем $n + 2 = 12 - 2n$. Или $12 = 3n + 2$, что, очевидно, неверно, так как 12 делится на 3.

Теперь рассмотрим другой случай: Ванину фишку «зажали» после его хода. Значит, Ваня сделал на один ход больше — Сережа сделал n ходов, а Ваня $n + 1$. Тогда сумма высот Сережиных фишек равна $n + 2$, а высота Ваниной равна $6 - n - 1$. Получаем $n + 2 = 12 - 2n - 2$. Или $12 = 3n + 4$, что, очевидно, неверно.

6. Из 5 школьников можно составить ровно 10 различных пар. Действительно, есть 5 вариантов выбрать первого школьника в пару и четыре варианта выбрать второго (школьник не может быть в паре сам с собой). Вроде бы 20 вариантов... Но при этом каждую пару мы посчитали два раза — один раз назвав «первым» одного из членов пары, а потом — другого! (Обязательно выпишите таким способом все пары из пяти школьников и заметьте это!) Теперь, так как никакие два школьника не были одновременно более, чем на одном занятии, то получается, что из всех ходивших на кружок можно составить не менее, чем $10\cdot 20 = 200$ различных пар. Предположим, что на кружке побывало девятнадцать школьников. Тогда из них можно составить $\dfrac{19\cdot 18}{2} = 171$ различных пар (обоснуйте это так же, как мы это сделали для 5 школьников). Но 171 меньше 200. Противоречие.

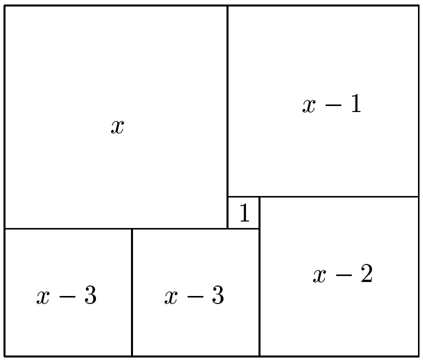
Примечание. Число различных (неупорядоченных) пар, которые можно составить из n школьников, равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Попробуйте это доказать. А сколько можно составить упорядоченных пар (где один назван командиром)?

1995 год

6 класс

1. Поскольку половина персиков составляет одну треть от всего компота, то половина от оставшихся персиков составляет одну шестую часть от всего компота. А нам надо определить, какую часть половина оставшихся персиков (1/6 всего компота) составляет от оставшегося компота (2/3 компота). Учитывая, что $2/3 = 4/6$, получаем ответ — 1/4.

3. Заметим, что сторона самого большого квадрата равна сумме сторон двух квадратов: следующего за ним по часовой стрелке и самого маленького. Обозначив сторону самого большого квадрата через x, последовательно выразим стороны других квадратов: $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, $x - 3$ (см. рисунок). Теперь



заметим, что верхняя сторона прямоугольника равна $x + (x-1)$, а нижняя — $(x-2) + (x-3) + (x-3)$. Но ведь противоположные стороны прямоугольника равны. Получаем уравнение

$$x + (x-1) = (x-2) + (x-3) + (x-3).$$

Откуда $2x - 1 = 3x - 8$ и, значит, $x = 7$.

4. Очевидно, что вторая цифра множителя — нуль. Посмотрим, какими могут быть первая и третья цифры множителя. Видно, что если умножить 1995 на последнюю цифру множителя, то получится пятизначное число, а если на первую — то четырехзначное.

Выпишем произведения числа 1995 на все ненулевые цифры: $1995 \cdot 1 = 1995$, $1995 \cdot 2 = 3990$, $1995 \cdot 3 = 5985$, $1995 \cdot 4 = 7980$, $1995 \cdot 5 = 9975$, $1995 \cdot 6 = 11970$, $1995 \cdot 7 = 13965$, $1995 \cdot 8 = 15960$, $1995 \cdot 9 = 17955$.

Получается, что последней цифрой множителя может быть 6, 7, 8 или 9, а первой — 1, 2, 3, 4 или 5. В принципе, сейчас уже можно просто перебрать все допустимые варианты выбора первой и последней цифры (их всего 20 — объясните, почему).

Но лучше еще немного порассуждать и сократить себе работу по перебору вариантов.

Заметим, что при умножении 1995 на первую цифру множителя получается четырехзначное число ($*$ГОД), у которого последние три цифры различны (по условию, разные буквы обозначают разные цифры). Поэтому число $*$ГОД не может быть равным 1995 и 3990. Значит, для первой цифры осталось только три варианта: 3, 4, 5. А всего вариантов выбора первой и последней цифры множителя осталось 12 (почему?).

Теперь посмотрим на пятизначное число, полученное при умножении 1995 на последнюю цифру множителя. Видно, что две его последние цифры должны быть различными (почему?), и поэтому, оно не равно 17955. Значит, последняя цифра множителя — не 9.

Итак, для первой цифры осталось только три варианта (3, 4, 5), а для последней тоже только три (6, 7, 8). Значит, осталось 9 вариантов выбора первой и последней цифры.

Теперь заметим, что четыре цифры О, Д и Ь, И различны. Отсюда простыми рассуждениями получаем, что для множителя остается только четыре варианта: 308, 306, 407 и 508.

Это уже небольшой перебор, который можно быстро провести, и найти ответ. (В принципе можно было еще заметить, что если первая цифра 5, то $*$ГОД = 9950, при сложении обязательно произойдет перенос в следующий разряд, и итог будет не шестизначным, а семизначным. Поэтому для первой цифры остается только два варианта: 3 и 4. А для множителя — только три: 308, 306, 407.)

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 1995 \\ 308 \end{array} \\ \hline 11970 \\ 5985 \\ \hline 610470 \end{array}$$

5. В задачах, где нужно просто предъявить пример, самое главное — интуитивно почувствовать путь его построения (который часто приходит в голову в процессе неудачных попыток доказательства!). Попробуем поразмышлять вместе. Конечно кажется, что если такие команды существуют, то они примерно равны по силе. Но как же измерить силу команд? Упорядочим наших девять борцов по силе и присвоим каждому рейтинг от 9 до 1: 9 — самому сильному и т. д. Тогда сумма рейтингов борцов равна 45. Постараемся составить команды так, чтобы суммы рейтингов борцов в командах были равны. То есть нам надо разбить числа от 1 до 9 на три группы так, чтобы сумма чисел в каждой группе равнялась 15. Где-то мы, кажется, видели похожую задачку...? Ага, когда составляли магический квадрат 3×3! В нем сумма чисел по любой горизонтали, любой вертикали и любой диагонали равна 15! Нарисуем магический квадрат 3×3.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Попробуем взять из него строки. Это три команды с одинаковым суммарным рейтингом — 15. Проверим... Первая со второй — счет 5 : 4, вторая с третьей — счет 5 : 4, и третья с первой — счет 5 : 4! Ура — получилось! Кстати, столбцы тоже подошли бы (проверьте!).

7 класс

1. Разложим число 1995 на простые множители — $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$. Надо разбить это произведение на две группы: часть множителей войдет в исходное число, а другая часть будет его цифрами. Ясно, что 19 войдет в искомое число (такой цифры «19» — нет!). Остается несложный перебор, который дает единственный ответ: $57 \cdot 5 \cdot 7 = 1995$.

2. Пусть s — стоимость сапфира, t — топаза, а i — изумруда. Из первой строчки нашего стихотворения получаем

$$s + 2t = 3i.$$

А из второй —

$$7s + t = 8i.$$

Посмотрим, сколько стоят 24 изумруда. («А почему вдруг именно 24?» — спросите вы. А вот почему: если я могу брать изумруды по три штуки, а вы по 8, то 24 — это первое число, которое получится у нас обоих! Проверьте это.)

Итак, из первой строчки

$$8s + 16t = 24i.$$

А из второй

$$21s + 3t = 24i.$$

Получается, что

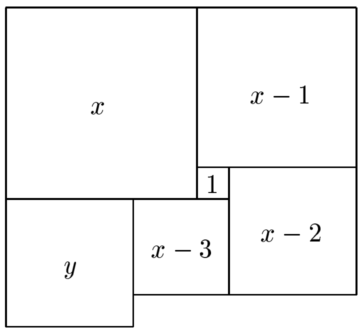
$$8s + 16t = 21s + 3t$$

или

$$13s = 13t.$$

То есть 13 сапфиров равны по стоимости 13 топазам, а, значит, стоимость одного сапфира равна стоимости одного топаза.

3. Заметим, что сторона самого большого квадрата равна сумме сторон двух квадратов: следующего за ним по часовой стрелке и самого маленького. Обозначив сторону самого большого квадрата через x, последовательно выразим стороны других квадратов — $x-1$, $x-2$, $x-3$ (см. рисунок). Сторону



левого нижнего квадрата нам выразить через x не удалось, поэтому придется обозначить ее через y. Теперь заметим, что верхняя сторона прямоугольника равна $x + (x-1)$, а нижняя — $(x-2) + (x-3) + y$. Но ведь противоположные стороны прямоугольника равны. Получаем уравнение

$$x + (x-1) = (x-2) + (x-3) + y.$$

Откуда $2x - 1 = 2x - 5 + y$ и, значит, $y = 4$.

5. Разность между числом и суммой его цифр делится на 9. Поэтому все числа, которые мы получали, делились на 9 (кроме, может быть, исходного). Пойдем с конца. Нуль в принципе получается из любого однозначного натурального числа после вычитания из него суммы цифр. Но из них на 9 делится только 9. Поэтому на предпоследнем шаге у нас было число 9. Но 9 можно получить только из одного числа, делящегося на 9, — из 18. И так далее

$$0 \leftarrow 9 \leftarrow 18 \leftarrow 27 \leftarrow 36 \leftarrow 45 \leftarrow 54 \leftarrow 63 \leftarrow 72 \leftarrow 81.$$

Тут путь раздваивается — 81 можно получить и из 90, и из 99. Сделаем последний шаг назад (теперь делимость на 9 нам уже не важна!) — 90 ни из какого числа получить нельзя, а для 99 есть целых 10 возможных предшественников: $100, 101, 102, \ldots, 109$.

1996 год

6 класс

2. Пусть Боря собрал x грибов. Тогда 20% от количества грибов, собранных Борей, равно $0{,}2x$. Значит, Алик собрал $x - 0{,}2x = 0{,}8x$ грибов. А Вася собрал $x + 0{,}2x = 1{,}2x$ грибов. Получаем, что Вася собрал грибов в $\frac{1{,}2}{0{,}8} = 1{,}5$ раза больше, чем Алик, то есть на 50% больше (от количества грибов, собранных Аликом).

Примечание. К сожалению, условие этой задачи допускает неоднозначное толкование — можно поразному понимать, от какого именно количества надо брать проценты. Так, Вася собрал грибов на 50%

больше (от количества грибов, собранных Аликом), но если считать от количества грибов, собранных Васей, то получится, что он собрал на $33\frac{1}{3}$ процента больше. Поэтому, если вам на олимпиаде встречается задача на проценты, допускающая неоднозначное толкование, обязательно уточните условие у дежурного по аудитории и напишите подробное решение. Если вы приведете только ответ, то нельзя будет определить — может у вас просто арифметическая ошибка...

3. Найдем сначала количество пятизначных чисел, делящихся на пять, и количество пятизначных чисел, у которых хотя бы одна из первых двух цифр слева — пятерка.

Каждое пятое пятизначное число делится на пять, а всего пятизначных чисел 90000. Значит, пятизначных чисел, делящихся на 5, всего $90000 : 5 = 18000$.

Первые две слева цифры пятизначного числа образуют двузначное число. Всего имеется 90 двузначных чисел: $10, 11, 12, \ldots, 99$. Из них

9 чисел оканчиваются на 5: $15, 25, 35, \ldots, 95$, и

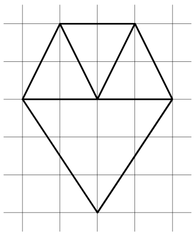
10 чисел начинаются с 5: $50, 51, 52, \ldots, 59$.

То есть всего вроде бы 19 двузначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна пятерка?! Но при этом одно число — 55 — мы посчитали два раза. Значит, всего имеется 18 двузначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна пятерка. А сколькими способами можно «продолжить» двузначное число до пятизначного? Первые две цифры у нас фиксированы, а три последние могут быть любыми. То есть получается 1000 пятизначных чисел, начинающихся с данного двузначного (например, если двузначное число было 25, то соответствующие пятизначные это $25000, 25001, 25002, \ldots, 25999$). Теперь количество пятизначных чисел, у которых хотя бы одна из первых двух цифр слева — пятерка, легко подсчитать. Их 18000.

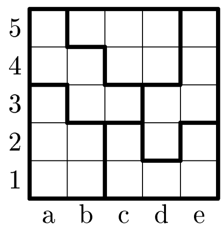
Мы получили, что чисел, делящихся на 5, и чисел, у которых хотя бы одна из первых двух цифр слева — пятерка, поровну (по 18000). Значит, пятизначных чисел, не делящихся на 5, и тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятерка, тоже будет поровну (по $90000 - 18000 = 72000$).

4. Ошибиться при подсчете красных шариков мог только один из них, а двое правильно сосчитали число красных шариков. Поэтому красных шариков было 2. В подсчете красных шариков ошибся С, значит, он путал красные с оранжевыми, а желтые и зеленые считал правильно. Получаем, что желтых — 8, а зеленых — 9. Все оставшиеся шарики — оранжевые. Общее число шариков все считали правильно — 23. Значит, оранжевых шариков было 4 ($23-2-8-9 = 4$).

5. а) См. рисунок.



б) Каждая сторона пятиугольника содержит сторону одного из треугольников. У пятиугольника пять сторон, а треугольников у нас четыре. Значит, какие-то две стороны пятиугольника содержат стороны одного и того же треугольника. Следовательно, угол между этими сторонами тупой. Противоречие с тем, что все треугольники должны быть остроугольными.



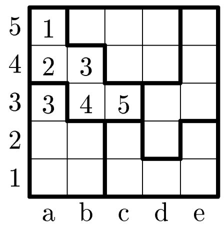
6. Введем на нашем квадрате координаты (как в шахматах или в игре «морской бой»).

Раскрасим правильно блок a5a4b4b3c3. Тогда правильная раскраска остальных клеток восстанавливается однозначно в следующем порядке: a3, d2, c5, e1, d1, b5, d5, e5, d4, d3, c4, e4, e3, e2, a2, a1, b2, b1, c2, c1.

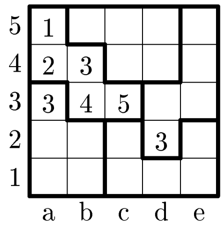
Опишем подробно два первых шага, приведя к остальным только картинки (обязательно проведите рассуждение до конца сами!).

Итак, раскрасим правильно блок a5a4b4b3c3. Пусть клетка a5 окрашена в цвет 1, a4 — в цвет 2, b4 — в цвет 3, b3 — в цвет 4, c3 — в цвет 5.

В какой цвет нужно покрасить клетку a3, чтобы получилась правильная раскраска? В цвета 1 и 2 покрасить нельзя, так как они уже есть на вертикали «a». В цвета 4 и 5 покрасить тоже нельзя, так как они уже есть на третьей горизонтали. Остается единственная возможность — цвет 3.

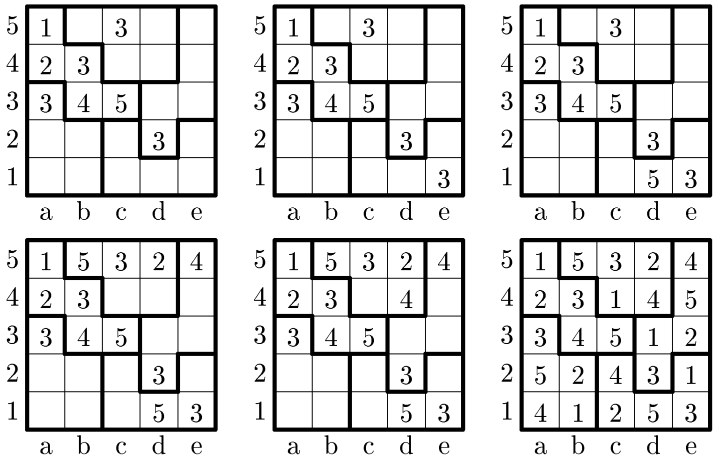


Теперь посмотрим, в какой цвет нужно покрасить d2. Рассмотрим сначала блок b5c5c4d5d4. В нем на четвертой горизонтали не может быть клетки цвета 3 (цвет 3 на четвертой горизонтали уже есть). Значит, клетка цвета 3 в нашем блоке — это одна из трех клеток пятой горизонтали: b5, c5, d5. Полу-



чаем, что цвет 3 уже встречается на пятой (одна из клеток b5, c5, d5), четвертой (b4) и третьей (a3) горизонталях. Значит, единственная возможная клетка цвета 3 в блоке d2d3e3e4e5 — это клетка d2.

Теперь продолжите, пожалуйста, рассуждение сами.



7 класс

1. Трехзначное число, у которого в разряде сотен — цифра a, в разряде десятков — цифра b, а в разряде единиц — цифра c, равно $100a + 10b + c$. (Например, $394 = 3 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 4$.) Просматривая по кругу наши девять трехзначных чисел, замечаем, что каждая цифра встречается ровно по одному разу в каждом из разрядов — сотен, десятков и единиц. То есть каждая цифра один раз войдет в нашу сумму с коэффициентом 100, один раз — с коэффициентом 10 и один раз — с коэффициентом 1. Значит, искомая сумма не зависит от порядка, в котором записаны цифры, и равна

$$(100+10+1)(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 111 \cdot 45 = 4995.$$

2. Попробуем проследить «с конца», сколько у какого пирата было монет после каждой игры. В последней игре первый проиграл второму половину своих монет, после чего у него осталось 15 монет. Но это ровно столько, сколько он только что отдал второму! Значит, перед этим у первого было $15 \cdot 2 = 30$ монет, а у второго было $33 - 15 = 18$ монет. Аналогично, во второй игре второй пират проиграл ровно столько, сколько у него осталось после второй игры, то есть 18 монет. Получаем, что перед второй игрой у второго пирата было $18 \cdot 2 = 36$ монет, а у первого было $30 - 18 = 12$ монет. Проделав самостоятельно еще один шаг рассуждения, вы найдете, что вначале у пиратов было по 24 монеты.

3. Заметим, что $x = 2$, $y = 2$ — решение. Попробуем найти еще одно в виде $x = 2^k$, $y = 2^n$, подобрав подходящие k и n.

Имеем
$$2 \cdot \left(2^k\right)^3 = \left(2^n\right)^4,$$
или
$$2^{3k+1} = 2^{4n}.$$

Осталось подобрать k и n так, чтобы $3k+1 = 4n$. Ну, а это уже совсем просто. Например, $k = 5$, $n = 4$ и, соответственно, $x = 32$, $y = 16$.

4. Представьте себе, что вы хотите объяснить другу какой-нибудь найденный вами способ прочтения слова. Для этого его надо как-то записать. Обозначим шаг вправо через 1, а шаг вниз через 0.

Тогда каждому способу прочтения слова (назовем его путем) мы поставим в соответствие последовательность из пяти нулей и единиц по следующему правилу:

если на первом шаге мы идем вправо, то на первое место пишем нуль, если вниз — то единицу;

если на втором шаге мы идем вправо, то на второе место пишем нуль, если вниз — то единицу;

и так далее.

Заметим, что разным путям соответствуют разные последовательности, а разным последовательностям — разные пути, причем каждой возможной последовательности соответствует путь — надо просто пройти, следуя нашим правилам (соответствия с такими свойствами математики называют взаимнооднозначными).

То есть число путей равно числу последовательностей нулей и единиц длины 5. А их $2^5 = 32$. Если вы впервые встретились с последовательностями нулей и единиц, обязательно выпишите все возможные последовательности нулей и единиц длины 1, 2, 3, 4, 5. Сколько их получилось?

5. Обозначим искомое количество лоскутков белого цвета через x. Тогда лоскутков черного цвета будет $32 - x$. Чтобы составить уравнение, подсчитаем двумя способами количество «границ» белых лоскутков с черными.

Каждый белый лоскут граничит с тремя черными. То есть число границ равно $3 \cdot x$.

С другой стороны, каждый черный лоскут граничит с пятью белыми. То есть число границ равно $5 \cdot (32 - x)$.

Получаем уравнение $3x = 5\cdot(32-x)$. Откуда $8x = 160$ и $x = 20$.

6. Посмотрим, сколько раз входит каждое число от 2 до 100 в наше произведение. 2 входит во все факториалы, начиная со второго, то есть 99 раз; 3 входит во все факториалы, начиная со третьего, то есть 98 раз; и так далее — каждое число входит во все факториалы, начиная со «своего». То есть n входит в произведение $101 - n$ раз:

$$1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 100! = 2^{99}\cdot 3^{98}\cdot 4^{97}\cdot\ldots\cdot 97^4\cdot 98^3\cdot 99^2\cdot 100.$$

В частности, все нечетные числа входят в произведение четное число раз, а четные — нечетное число раз. Выделим отдельно произведение всех четных чисел, взятых по одному разу,

$$1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 100! = 2^{99}\cdot 3^{98}\cdot 4^{97}\cdot\ldots\cdot 97^4\cdot 98^3\cdot 99^2\cdot 100 = (2^{98}\cdot 3^{98}\cdot 4^{96}\cdot\ldots\cdot 97^4\cdot 98^2\cdot 99^2)\cdot(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 98\cdot 100).$$

В первой скобке все степени четные, значит, произведение чисел в первых скобках — квадрат целого числа. А произведение чисел во вторых скобках равно

$$2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 98\cdot 100 = 2\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot\ldots\cdot(2\cdot 49)\cdot(2\cdot 50) = 2^{50}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 49\cdot 50 = 2^{50}\cdot 50!$$

Но 2^{50} — есть квадрат целого числа. Значит, если зачеркнуть 50!, то оставшееся произведение будет квадратом целого числа.

1997 год

6 класс

1. Начнем проверять пример справа налево. В разрядах единиц и десятков все в порядке, а в разряде сотен появляется ошибка. Значит, одна из цифр этого разряда — 1, 8 или 7 — переставлена. Если предположить, что Витя переставил две карточки «внутри» разряда сотен (единственный вариант — поменять местами 7 и 8), то еще останется ошибка в разряде десятков тысяч. Значит, одна из цифр разряда сотен поменялась с цифрой более старшего разряда.

Чтобы восстановить равенство в разряде сотен, цифру 1 можно поменять только на 9. Цифра 9 в более старших разрядах есть только одна. Но если 1 и 9 поменять местами, то еще сохранится ошибка в разряде десятков тысяч.

Цифру 8 можно поменять только на 6, но ни одной цифры 6 в примере нет.

Значит, остается единственная возможность — поменять цифру 7. Вместо нее надо поставить цифру 9. Она у нас (в более старших разрядах) только одна и, если их поменять местами, то получается верный пример.

2.

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x},$$

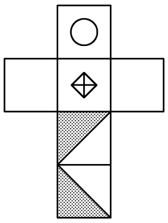
$$\frac{2}{73} - \frac{1}{219} - \frac{1}{292} - \frac{1}{60} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{2}{73} - \frac{1}{73 \cdot 3} - \frac{1}{73 \cdot 4} - \frac{1}{60} = \frac{1}{x},$$

$$
\begin{gathered}
\frac{17}{73\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{5\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{x},\\
\frac{17\cdot 5-73}{73\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{x},\\
\frac{1}{73\cdot 5}=\frac{1}{x},\\
365=x.
\end{gathered}
$$

3. Так как среди любых 12 грибов хотя бы один — рыжик, то груздей не больше 11. Так как среди любых 20 грибов хотя бы один — груздь, то рыжиков не больше 19. А так как всего в корзине 30 грибов, получаем, что груздей ровно 11, а рыжиков ровно 19.

5. См. развертку. На первом рисунке в условии внизу белая грань, а две оставшиеся невидимые грани — треугольники.



Лучше всего сделать из подручных материалов кубик и пофантазировать...

Похоже, первая картинка отличается от второй просто поворотом, то есть две невидимые вертикальные грани на первом рисунке — треугольники. Нарисуем их на нашем кубике. Ага, теперь не получается на него посмотреть так, чтобы увидеть третью картинку. Что-то тут не так, но мы вроде где-то близко... Очень уж хочется «спрятать» два треугольника со второй картинки на задние грани в первой... Идея — их надо еще перевернуть! То есть вторая картинка — это не просто повернутая на 180 градусов первая, а еще и перевернутая! Верхняя грань на второй картинке была внизу на первой! Рисуем... Теперь все сходится и на третьей картинке.

6. Как только вы освободитесь от догмы, что фонарик обратно должен носить самый быстрый, то есть папа, и станете рассматривать другие варианты, то скоро догадаетесь, что надо пустить вместе бабушку и малыша. Теперь решение уже не очень сложно найти. Итак,

папа с мамой	— 2 мин
папа обратно с фонариком	— 1 мин
внук с бабушкой	— 10 мин
мама обратно с фонариком	— 2 мин
папа с мамой	— 2 мин

Всего 17 мин!

7 класс

1. Если периметр прямоугольника равен 1996, то сумма длин его соседних сторон равна 998. Все такие прямоугольники имеют вид (пишем по возрастанию меньшей стороны) 1×997, 2×996, $3 \times 995, \ldots$ $\ldots, 498 \times 500$, 499×499. На этом список заканчивается, так как прямоугольник 500×498 уже только что был. Видим, что каждому числу от 1 до 499 соответствует ровно один прямоугольник. Аналогично, если периметр прямоугольника равен 1998, то сумма длин его соседних сторон равна 999. Все такие прямоугольники имеют вид (пишем по возрастанию меньшей стороны) 1×998, 2×997, $3 \times 996, \ldots, 498 \times 501$, 499×500. На этом список заканчивается, так как прямоугольник 500×499 уже только что был. Видим, что каждому числу от 1 до 499 соответствует ровно один прямоугольник. То есть в обоих случаях прямоугольников поровну, а именно 499.

2. а) Пяти автомобилей не хватит, так как в день, когда один из автомобилей «отдыхает», кому-то не на чем будет ехать. Шести, очевидно, хватает.

б) Ясно, что автомобилей не менее 8. Если каждый день «отдыхает» не более одного автомобиля, то всего автомобилей не больше, чем дней недели, то есть семи. Значит, в какой-то день отдыхает два автомобиля, и в этот день нам надо еще как минимум 8 автомобилей. Итого 10. Мы доказали, что меньше, чем десятью автомобилями обойтись нельзя. Десяти достаточно — составьте, пожалуйста, график сами.

Примечание. Использованное здесь рассуждение встречается очень часто и носит название «Принцип Дирихле». Его любят формулировать следующим образом: «Если в n клетках сидит $n+1$ кролик, то в какой-то клетке сидят как минимум два кролика.»

3. Пусть x — длина меньшего отрезка. В верхней стороне четырехугольника, имеющей длину 1, укладывается 3 маленьких отрезка и один большой. Значит, длина большого $1-3x$. В нижней стороне четырехугольника, имеющей длину 2, укладывается 3 больших отрезка и один маленький. Получаем уравнение

$$3\cdot(1-3x)+x=2.$$

Откуда

$$3-9x+x=2.$$

Или

$$x=\frac{1}{8}.$$

То есть длина меньшего отрезка равна 1/8. А большего — $1-3\cdot 1/8=1-3/8=5/8$. Значит, больший отрезок в пять раз длиннее меньшего.

5. Двоечник ошибся в $1/2$ от общего числа вопросов. Но он мог ошибиться только в тех вопросах, на которые отвечал наугад. При этом число вопросов, в которых он ошибся, равно $4/5$ от числа вопросов, на которые он отвечал наугад. То есть число вопросов, на которые он отвечал наугад, в $5/4$ раза больше числа вопросов, в которых он ошибся. Значит, он отвечал наугад на $(1/2)\cdot(5/4) = 5/8$ от общего числа вопросов. Ну, а списал ответы на все остальные, то есть на $3/8$ от общего числа вопросов.

Содержание