Департамент образования г. Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Дом научно-технического творчества молодёжи
Московский центр непрерывного математического образования

LXVII Московская математическая олимпиада

Математический праздник

В. Арнольд, Т. Голенищева-Кутузова, Е. Корицкая, Ю. Кудряшов, А. Кулыгин, Г. Мерзон, С. Маркелов, А. Спивак, Р. Федоров, А. Хачатурян, И. Ященко

Москва
15 февраля 2004 года

6 класс

Задача 1. Кузнечик прыгает вдоль прямой вперед на 80 см или назад на 50 см. Может ли он менее чем за 7 прыжков удалиться от начальной точки ровно на 1 м 70 см? [***3 балла***]

Ответ. Может.

Указание. $5 \cdot 5 - 8 = 17$.

Задача 2. Килограмм говядины с костями стоит 78 рублей, килограмм говядины без костей — 90 рублей, а килограмм костей — 15 рублей. Сколько граммов костей в килограмме говядины? [***5 баллов***] (А. Хачатурян.)

Ответ. 160 граммов.

Решение. Пусть в килограмме говядины x кг костей, тогда «чистой» говядины в нём $(1 - x)$ кг. Таким образом,

$$15x + 90(1 - x) = 78,$$

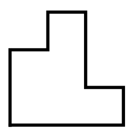
откуда $x = 0{,}16$.

Задача 3. а) Придумайте три правильные несократимые дроби, сумма которых — целое число, а если каждую из этих дробей «перевернуть» (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей тоже будет целым числом. [***1 балл***]

б) То же, но числители дробей — не равные друг другу натуральные числа. [***3 балла***] (Т. Голенищева-Кутузова.)

Ответ. Да, может. Например, 2/11, 3/11, 6/11.

Задача 4. Сложите из фигур, изображенных на рисунке, а) квадрат размером 9×9 с вырезанным в его центре квадратом 3×3; [***3 балла***]

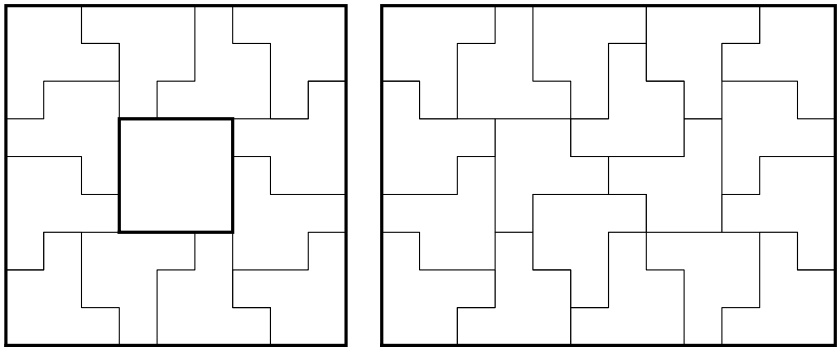


б) прямоугольник размером 9×12. [***5 баллов***]

(Фигуры можно не только поворачивать, но и переворачивать.)

(А. Хачатурян.)

Ответ.



а) б)

Задача 5. Вадик написал название своего родного города и все его циклические сдвиги, получив таблицу 1.

Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, он составил таблицу 2 и выписал её последний столбец: `ВКСАМО`.

Таблица 1	Таблица 2
МОСКВА	АМОСКВ
АМОСКВ	ВАМОСК
ВАМОСК	КВАМОС
КВАМОС	МОСКВА
СКВАМО	ОСКВАМ
ОСКВАМ	СКВАМО

Саша сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» `МТТЛАРАЕКИС`. Что это за город, если его название начинается с буквы `С`? [***6 баллов***] (А. Шень.)

Ответ. `СТЕРЛИТАМАК`.

Решение аналогично решению четвёртой задачи 7 класса.

7 класс

Задача 1. Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух? [***4 балла***] (И. Ященко.)

Ответ. Только на 7.

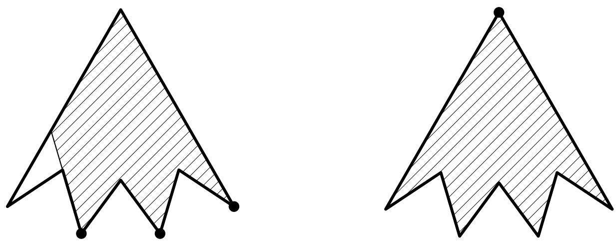
Решение. Очевидно, что последняя цифра больше 1. Трёхзначное простое число не может оканчиваться ни на четную цифру (т. е. на 0, 2, 4, 6 или 8), ни на цифру 5. Если последняя цифра 3 или 9, то сумма всех цифр числа, равная удвоенной последней цифре, делится на 3, а тогда само число делится на 3. Таким образом, осталась только цифра семь.

Замечания. Есть четыре числа, удовлетворяющих условию задачи: 167, 257, 347, 527; приводить примеры таких чисел в решении не требовалось.

Задача 2. Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трёх углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с мёдом освещены. Когда они полезли за мёдом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть? (Если да, нарисуйте пример, если нет, обоснуйте ответ.) [*4 балла*]

(Т. Голенищева-Кутузова, Ю. Кудряшов.)

Ответ. Да, могло (см. рисунок).



Замечание. Такое возможно, даже если заменить три на любое другое, сколь угодно большое число.

Задача 3. На доске написаны три правильные несократимые дроби, дающие в сумме единицу, причем их числители — различные натуральные числа. Оказалось, что если каждую из этих дробей «перевернуть» (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей будет натуральным числом. Приведите пример таких дробей. [*4 балла*] (Т. Голенищева-Кутузова.)

Ответ. Например, 2/11, 3/11, 6/11.

Задача 4. Таня написала название своего родного города и все его циклические сдвиги, получив таблицу 1.

Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, она составила таблицу 2 и выписала её последний столбец: `ВКСАМО`.

Таблица 1	Таблица 2
МОСКВА	АМОСКВ
АМОСКВ	ВАМОСК
ВАМОСК	КВАМОС
КВАМОС	МОСКВА
СКВАМО	ОСКВАМ
ОСКВАМ	СКВАМО

Валера сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» `ОССНГСОРОК`. Что это за город, если его название заканчивается на букву `К`? [***7 баллов***] (А. Шень.)

Ответ. `СОСНОГОРСК`.

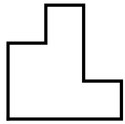
Решение. Мы будем постепенно восстанавливать валерину таблицу 2. Заметим сначала, что каждая буква встречается в каждом столбце столько же раз, сколько раз она встречается в слове. Так как слова в таблице упорядочены по алфавиту, то в первом столбце буквы слова стоят в алфавитном порядке.

```
Г********О
К********С
Н********С
О********Н
О********Г
О********С
Р********О
С********Р
С********О
С********К
```

В циклических сдвигах слова после его последней буквы идёт первая. Из пятой строки таблицы видно, что после буквы `Г` идёт `О`, из последней — что после `К` идет `С`, из четвёртой — что после `Н` идёт `О`, из первой, седьмой и девятой — что после `О` один раз идёт `Г`, один раз `Р` и один раз `С` и т. д. Так как слова упорядочены по алфавиту, то в строчках с одинаковой первой буквой возможные вторые буквы упорядочены по алфавиту.

```
ГО*******О
КС*******С
НО*******С
ОГ*******Н
ОР*******Г
ОС*******С
РС*******О
СК*******Р
СН*******О
СО*******К
```

Из следующей таблицы видно, что после пары букв `ОГ` идёт буква `О`, после `СК` идёт `С`, после `СН` идёт `О` и т. д. Можно, пользуясь этой информацией, заполнить третий столбец, потом четвёртый и т. д., пока не заполнится вся таблица. Но для решения задачи достаточно восстановить последнюю строку (т. к. название города оканчивается на `К`), что несложно сделать, зная, какая буква идёт за какой парой букв.



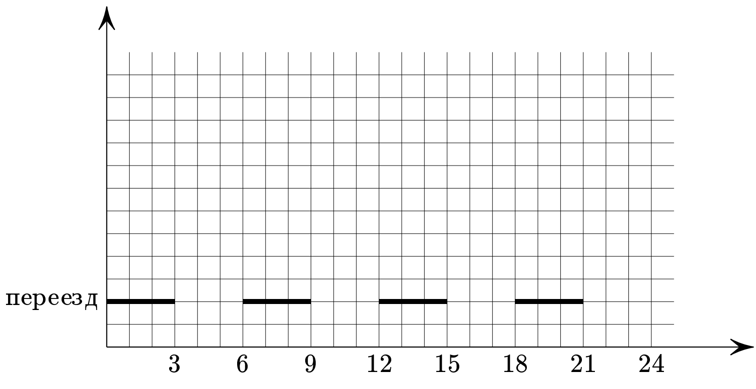
Задача 5. Сложите из фигур, изображенных на рисунке, квадрат размером 9×9 с вырезанным в его центре квадратом 3×3 (фигуры можно не только поворачивать, но и переворачивать). [***6 баллов***] (А. Хачатурян.)

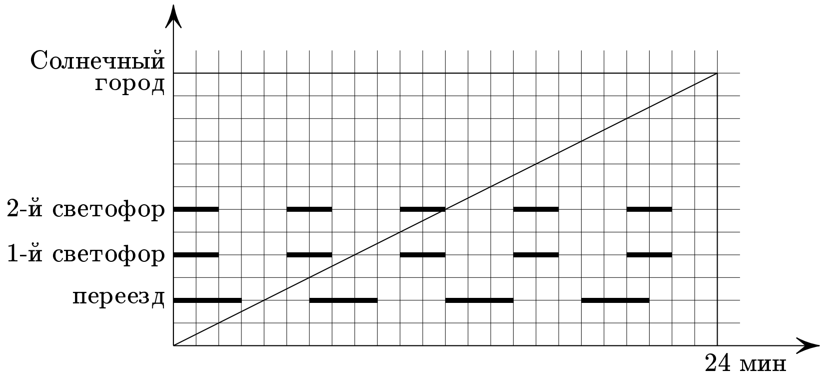
Ответ. См. задачу 4 а) шестого класса.

Задача 6. Из Цветочного города в Солнечный ведет шоссе длиной 12 км. На втором километре этого шоссе расположен железнодорожный переезд, который три минуты закрыт и три минуты открыт и т. д., а на четвёртом и на шестом километрах расположены светофоры, которые две минуты горят красным светом и три минуты — зеленым и т. д. Незнайка выезжает из Цветочного города в Солнечный в тот момент, когда переезд только что закрылся, а оба светофора только что переключились на красный. За какое наименьшее время (в минутах) он сможет доехать до Солнечного города, не нарушая правил, если его электромобиль едет по шоссе с постоянной скоростью (Незнайка не умеет ни тормозить, ни увеличивать скорость)? [***8 баллов***] (И. Ященко.)

Ответ. 24 мин.

Решение. Будем откладывать по оси абсцисс время (в минутах), а по оси ординат — расстояние от Цветочного города (в километрах). Так как скорость электромобиля постоянна, то график его движения — прямая. При этом Незнайка не может проезжать переезд, расположенный на втором километре шоссе, пока





не истекут три минуты, а также на седьмой, восьмой и девятой минутах, на тринадцатой—пятнадцатой минутах и т. д. Графически это означает, что прямая не может пересекать выделенные отрезки. Аналогично можно отметить отрезки, которые запрещено пересекать из-за светофоров. Осталось из начала координат провести прямую, которая не пересекает ни один из выделенных отрезков и пересекает горизонтальную прямую $y = 12$ как можно раньше.